Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Année 2003-2004

Feuille de Travaux Dirigés 2

Statistique bayésienne

L'entier compris 1 et 5 suivant le numéro de l'exercice proposé indique son niveau croissant de difficulté (1 : exercice très facile ... 5 : exercice relativement difficile).

Exercice 1 (2) Nous considérons une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité $\mathcal{B}(n,p)$. Nous nous plaçons dans un contexte bayésien.

1 Déterminer la loi de probabilité a priori non informative de Jeffreys de p, $\pi_1(p)$. Calculer les estimateurs bayésiens de p correspondant au maximum et à la moyenne de la loi de probabilité de p sachant que $X = x$ (loi a posteriori).

2 Nous considérons une nouvelle loi de probabilité a priori $\pi_2(p) = 1$ (loi uniforme sur $[0,1]$). Calculer les nouveaux estimateurs bayésiens de p correspondant au maximum et à la moyenne de la loi a posteriori.

Exercice 2 (1) Dans chacun des cas suivants donner la loi de probabilité a posteriori du paramètre θ ainsi que la loi marginale de Y :

- $Y|\theta \sim \mathcal{N}(0,\theta^2)$ et $1/\theta^2 \sim \mathcal{G}(1,2)$,
- $Y|\theta \sim \mathcal{P}(\theta)$ et $\theta \sim \mathcal{G}(2,1)$,
- $Y|\theta \sim \mathcal{N}eg(10,\theta)$ et $\theta \sim \mathcal{B}(1/2,1/2)$.

Exercice 3 (3) Nous considérons une variable aléatoire réelle X suivant une loi de probabilité $\mathcal{P}_X(\theta)$. Nous supposons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori $\mathcal{P}_\theta$. Nous souhaitons estimer θ et nous considérons la fonction de perte suivante :

$$L(\theta,a) = \begin{cases} k_2(\theta - a) & \text{si } \theta > a \\ k_1(a-\theta) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction perte $L(.,.)$ est le fractile d'ordre $\dfrac{k_2}{k_1+k_2}$ de la loi de probabilité de θ sachant que $X = x$, $\mathcal{P}_{\theta|X=x}$.

Rappelons que x est un fractile d'ordre k d'une loi de probabilité $\mathcal{P}_X$ si $\mathbb{P}(X < x) = k$.

Exercice 4 (2) Nous considérons une variable aléatoire réelle X suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Nous supposons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où σ^2 est un paramètre inconnu et fixé. Nous souhaitons estimer θ et nous considérons la fonction de perte quadratique suivante :

$$L_1(\theta, a) = (\theta - a)^2 .$$

1 Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte $L_1(.,.)$.

2 Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte quadratique pondérée suivante :

$$L_2(\theta, a) = \exp\left\{\frac{3\theta^2}{4}\right\}(\theta - a)^2 .$$

Exercice 5 (2) Nous considérons une variable aléatoire réelle X suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Nous supposons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori non informative impropre de mesure $\pi(\theta) = 1$.

1 Calculer la loi a posteriori de θ sachant que $X = x$.

2 Nous souhaitons tester $H_0 : \theta \leq 0$ contre $H_1 : \theta > 0$. Calculer le facteur bayésien et le maximum de la probabilité a posteriori de H_0. Conclure.

Exercice 6 (2) Nous considérons un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Nous supposons que le paramètre λ suit une loi $\chi^2(p)$ où p est un hyper-paramètre connu.

1 Calculer la loi a posteriori de λ sachant que $Y = y$.

2 Nous souhaitons tester $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda > \lambda_0$. Donner la probabilité a posteriori de H_0. Lorsque $n = 50$, $p = 6$ et $\theta_0 = 0.1$, donner la région de rejet de H_0.

Exercice 7 (3) Nous considérons un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ suivant une loi $\mathcal{E}(\theta)$. Les réalisations $x_1, \ldots, x_{n-r}$ de $n - r$ premières variables aléatoires ont été observées. Par contre, les réalisations des r variables aléatoires suivantes n'ont pas été observées et l'on sait seulement qu'elles ont dépassées une valeur c fixée (données censurées). Nous supposons que le paramètre θ suit une loi $\mathcal{G}(a, b)$ où a et b sont des hyper-paramètres connus strictement positifs.

1 Donner la fonction de vraisemblance.

2 Calculer la loi a posteriori de θ et son espérance mathématique.

3 Calculer la distribution prédictive de la variable correspondant à la somme des valeurs non observées dépassant c.