Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Année 2003-2004

Feuille de Travaux Dirigés 3

Tests Asymptotiques

L'entier compris 1 et 5 suivant le numéro de l'exercice proposé indique son niveau croissant de difficulté (1 : exercice très facile ... 5 : exercice relativement difficile).

Exercice 1 (4) Nous observons n terminaux X qui ont été mis hors service.

Pour le terminal i nous observons :

- y_i^1 sa durée de vie.
- y_i^2 le nombre de révisions qu' il a subi.
- y_i^3 le nombre de révisions avec changement de pièces.

Nous supposons que :

- Y_i^1 suit une loi exponentielle de paramètre γ.
- Y_i^2 suit une loi de Poisson de paramètre λy_i^1. Il s'agit de la loi conditionnelle de Y_i^2/Y_i^1.
- Y_i^3 suit une loi binomiale de paramètres (y_i^2, p). Il s'agit de la loi conditionnelle de $Y_i^3/Y_i^1, Y_i^2$.

Les variables Y_i^j, $i = 1, .., n$, $j = 1, 2, 3$, sont supposées indépendantes et nous posons $\theta = (\gamma, \lambda, p)$.

1 Donner la log-vraisemblance $L_n(Y, \theta)$ de $Y = (Y_1, .., Y_n)$, où
$Y_i = (Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3)$ et vérifier que $\mathbb{E}\left(\frac{\delta}{\delta\theta} L_n(Y, \theta)\right) = 0$.

2 Déterminer les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres λ, γ et p ainsi que leur distribution asymptotique.

En déduire des intervalles de confiance de niveau approximativement égal à $1 - \alpha$ pour les paramètres γ, λ et p.

3 Déterminer la statistique de Wald et celle du rapport de vraisemblance pour l'hypothèse $H_0 : \gamma = \lambda$.

Exercice 2 (4) Nous disposons de n mesures de vitesses x_i et nous supposons que ces mesures sont la réalisation des variables aléatoires indépendantes $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Nous cherchons à tester si l'erreur de mesure σ^2 est proportionnelle à μ. En utilisant une calibration appropriée, nous nous ramenons au test de $H_0 : \sigma^2 = \mu^2$.

1 Donner la matrice d'information de Fisher et calculer l'information de Fisher sous l'hypothèse H_0.

2 Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ et σ^2. Sous l'hypothèse H_0, calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\mu}$ du paramètre μ. Sous l'hypothèse H_0, montrer que le meilleur estimateur de μ, au sens de l'erreur quadratique moyenne, de la forme $a \sum_{i=1}^{n} X_i$ est tel que $a^* = \dfrac{1}{(n+1)}$.

3 Construire la statistique de Wald pour ce problème de test.

4 Comparer le résultat obtenu à l'aide du test précédent à celui obtenu en utilisant le test du χ^2 lorsque :

$n = 53$, $\sum_{i=1}^{53} x_i = \overline{x} = 1.8$, $\dfrac{1}{53} \sum_{i=1}^{53} (x_i - \overline{x})^2 = 2.51$

et pour les classes suivantes :

A_i	$]-\infty, 0.58[$	$[0.58, 1.32[$	$[1.32, 1.99[$	$[1.99, 2.74[$	$[2.74, +\infty[$
n_i	10	9	11	13	9

Nous rappelons $F_{N(0,1)}(-0.65) = 0.26$ et $F_{N(0,1)}(-0.20) = 0.42$.
Par ailleurs, $F^{-1}_{\chi^2(3)}(0.95) = 7.8$ et $F^{-1}_{\chi^2(3)}(0.99) = 11.25$.

Exercice 3 (1) Nous considérons un échantillon i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_n$ de loi de probabilité $\mathcal{P}(\lambda)$. Étudier la forme des tests de Wald et du rapport de vraisemblance pour $H_0 : \lambda = \lambda_0$.

Exercice 4 (2) Nous considérons un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de loi de probabilité $\mathcal{P}(\lambda)$ et un échantillon i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_n$ de loi de probabilité $\mathcal{P}(\mu)$. Étudier la forme du test de Wald pour $H_0 : \lambda - \mu = 0$.

Exercice 5 (3) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi de densité

$$(1-\theta)\mathbb{I}_{]-0.5,0]}(x) + (1+\theta)\mathbb{I}_{]0,0.5]}(x)$$

où θ est un paramètre réel inconnu.

1 Quelles conditions doit vérifier θ ?

2 Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta_n}$ de θ.

3 Étudier la forme des tests de Wald et du rapport de vraisemblance pour $H_0 : \theta = \theta_0$.

Exercice 6 (3) Nous considérons n variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ où Y_i suit une loi Exponentielle de paramètre λ_i ($\mathbb{E}(Y_i) = \dfrac{1}{\lambda_i}$).
Nous supposons que

$$\log(\mathbb{E}(Y_i)) = \alpha + \beta x_i$$

où α et β sont des paramètres réels inconnus et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Donner la fonction de vraisemblance.

2 Calculer la matrice d'information de Fisher $I(\alpha, \beta)$.

3 Notons $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β. Quelle est la loi de probabilité asymptotique du vecteur aléatoire $\left(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)$?

4 Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à 5%, spécifier les régions critiques des tests de Wald et du rapport de vraisemblance de l'hypothèse H_0 selon laquelle $\alpha = \beta = 0$ contre son alternative H_1.

5 Comparer les résultats obtenus pour $n = 20$, $a = 1.15$ (réalisation de $\widehat{\alpha}$), $b = 0.9$ (réalisation de $\widehat{\beta}$), $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} x_i = -1.48$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 6.3$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} y_i = 64.26$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} \exp(-0.9 x_i)\, y_i = 60.21$.