On corrige ici la question 3 du TP3, c'est-à-dire qu'on démontre la propriété suivante.

Propriété. *Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que :*

- $X_0 > 0$ *;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{A}{X_n}\right)$.*

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{A}$.

<u>Première étape : on étudie la fonction qui génère la suite.</u> Définissons

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \to & \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right). \end{array}$$

Cette fonction est bien définie ; en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ appartient bien à $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right).$$

En conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ si } x < \sqrt{A}, \\ &= 0 \text{ si } x = 0, \\ &> 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{A}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{A};+\infty[$. Elle a un unique minimum, atteint en $\sqrt{A}$, qui vaut

$$f(\sqrt{A}) = \sqrt{A}.$$

<u>Deuxième étape : on montre que, pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{A} \leq X_{n+1} \leq X_n$.</u>
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = f(X_n) \geq \min f = \sqrt{A}. \tag{1}$$

En particulier, $X_n \geq \sqrt{A}$ pour tout $n \geq 1$.
De plus, pour tout $x \geq \sqrt{A}$,

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{A}{x}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{A} - x)(\sqrt{A} + x)}{2x} \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

(avec égalité si et seulement si $x = \sqrt{A}$). Autrement dit, $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq \sqrt{A}$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, puisque $X_n \geq \sqrt{A}$,

$$X_{n+1} = f(X_n) \leq X_n.$$

En combinant cela avec l'égalité (1), on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{A} \leq X_{n+1} \leq X_n.$$

Troisième étape : on obtient le résultat.
On vient de voir que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{A}$. Cette suite est donc convergente, vers une limite qu'on note ℓ, qui appartient à $[\sqrt{A}; +\infty[$. Il reste à montrer que $\ell = \sqrt{A}$.
Puisque f est continue (sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier et donc, en particulier, en ℓ), la caractérisation séquentielle de la continuité nous dit que

$$
\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to+\infty} X_{n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} f(X_n) \\
&= f(\ell).
\end{aligned}
$$

Or, d'après ce qu'on a vu à la deuxième étape, $f(\ell) \leq \ell$, avec égalité si et seulement si $\ell = \sqrt{A}$. Puisqu'on a égalité, on doit avoir $\ell = \sqrt{A}$.

Remarque (sur le conseil de Guillaume Legendre) : cette méthode de calcul de $\sqrt{A}$ s'appelle la *méthode de Héron*. Il s'agit d'un cas particulier de la *méthode de Newton*, qui vise à trouver un point d'annulation d'une fonction g différentiable en définissant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le lien entre la méthode de Héron et la méthode de Newton est bien expliqué dans le paragraphe suivant de l'encyclopédie Wikipédia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton#Racine_carr%C3%A9e`.