Exercice 37

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*, c \geq 0$ tels que $b \neq 1$.
On suppose que T est une fonction positive telle que, pour tout n,

$$T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + \Theta(n^c).$$

Montrer que $T(n) = \Theta(n^c) \times \sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$.

Remarque : on pourrait utiliser la méthode vue en cours et en TD consistant à démontrer d'abord le résultat pour des entiers n de la forme b^s, avec $s \in \mathbb{N}$, puis à généraliser à tous les entiers n en admettant que T est croissante. Ici, on propose une approche différente, qui a l'avantage de ne pas nécessiter l'hypothèse que T est croissante, mais nécessite des calculs un peu plus longs.

Soient $C_1, C_2 > 0$ des constantes telles que, pour tout n,

$$aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + C_1 n^c \leq T(n) \leq aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + C_2 n^c.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Démontrons par récurrence sur k que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, \lfloor \log_b(n) \rfloor\}$, la propriété suivante est vraie:

$$\begin{aligned}(P_k) : \quad a^k T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2^c} n^c \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) &\leq T(n) \\ &\leq a^k T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor\right) + C_2 n^c \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right).\end{aligned}$$

- Initialisation : pour $k = 0$, les trois parties de la double inégalité sont égales ; la propriété est donc vraie.

- Supposons la propriété vraie pour un certain entier $k \leq \lfloor \log_b(n) \rfloor - 1$ et démontrons-la pour $k + 1$. Alors

$$\begin{aligned}T(n) &\geq a^k T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2^c} n^c \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) \\ &\qquad \text{(par l'hypothèse de récurrence)} \\ &\geq a^k \left(aT\left(\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor}{b} \right\rfloor\right) + C_1 \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor^c\right) + \frac{C_1}{2^c} n^c \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)\end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse sur T)

$$= a^{k+1}T\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{k+1}}\right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2^c}n^c\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) + C_1 a^k\left\lfloor\frac{n}{b^k}\right\rfloor^c$$

$$\geq a^{k+1}T\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{k+1}}\right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2^c}n^c\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right) + \frac{C_1}{2^c}a^k\left(\frac{n}{b^k}\right)^c$$

(car $\lfloor x\rfloor \geq \frac{x}{2}$ pour tout $x \geq 2$ et $\frac{n}{b^k} \geq \frac{n}{b^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}} \geq b \geq 2$.)

$$= a^{k+1}T\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{k+1}}\right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2^c}n^c\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right).$$

On a donc obtenu l'inégalité gauche de (P_{k+1}). L'inégalité droite s'obtient de manière presque identique, ce qui conclut la récurrence.

Appliquons l'inégalité droite de la propriété que nous avons démontrée à $k = \lfloor\log_b(n)\rfloor$:

$$T(n) \leq a^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}T\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}}\right\rfloor\right) + C_2 n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$$

$$\leq M a^{\lfloor\log_b(n)\rfloor} + C_2 n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right),$$

(où $M = \max_{1\leq k<b} T(k)$)

$$\leq M a^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}\left(\frac{n}{b^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}}\right)^c + C_2 n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right),$$

$$= M n^c\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\lfloor\log_b(n)\rfloor} + C_2 n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right),$$

$$\leq \max(M, C_2)\times n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right). \tag{1}$$

Appliquons maintenant l'inégalité gauche :

$$T(n) \geq a^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}T\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{\lfloor\log_b(n)\rfloor}}\right\rfloor\right) + \frac{C_1}{2}n^c\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\log_b(n)\rfloor-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{C_1}{2} n^c \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right) \\
&= \frac{C_1}{4} n^c \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right) + \frac{C_1}{4} n^c \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right) \\
&= \frac{C_1}{4} n^c \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor - 1} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right) + \frac{C_1}{4} \left(\frac{b^c}{a} \right) n^c \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right) \\
&\geq \frac{C_1}{4} \min \left(1, \frac{b^c}{a} \right) \times n^c \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor} \left(\frac{a}{b^c} \right)^i \right). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

On a établi, pour un entier n quelconque, les inégalités (1) et (2). Combinées, elles démontrent le résultat demandé.

Exercice 38

On garde les notations de l'exercice précédent.
Montrer que

1. $T(n) = \Theta(n^c)$ si $c > \log_b(a)$,
2. $T(n) = \Theta(n^c \log(n))$ si $c = \log_b(a)$,
3. $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ si $c < \log_b(a)$.

Nous allons exploiter le résultat de l'exercice 23 : pour toute constante $x > 0$,

1. $\sum_{i=0}^{S} x^i = \Theta(1)$ si $x < 1$,
2. $\sum_{i=0}^{S} x^i = \Theta(S)$ si $x = 1$,
3. $\sum_{i=0}^{S} x^i = \Theta(x^S)$ si $x > 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i &= \Theta(1) \text{ si } \frac{a}{b^c} < 1 \text{ (ce qui équivaut à } c > \log_b(a)), \\
&= \Theta(\log_b(n)) \text{ si } \frac{a}{b^c} = 1 \text{ (ce qui équivaut à } c = \log_b(a)), \\
&= \Theta\left(\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b(n)}\right) = \Theta\left(n^{\log_b(a)-c}\right) \\
&\qquad \text{si } \frac{a}{b^c} > 1 \text{ (ce qui équivaut à } c < \log_b(a)).
\end{aligned}$$

On combine cela avec le résultat de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(n^c) \times \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_b(n) \rfloor} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \right) \\
&= \Theta(n^c) \text{ si } c > \log_b(a), \\
&= \Theta(n^c \log_b(n)) \text{ si } c = \log_b(a), \\
&= \Theta(n^c n^{\log_b(a)-c}) = \Theta(n^{\log_b(a)}) \text{ si } c < \log_b(a).
\end{aligned}$$