On démontre ici le résultat suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$\{x^q, q \in \mathbb{Q}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ce résultat peut se démontrer rapidement si on utilise les résultats du cours d'analyse 1 sur les fonctions exp et ln. Toutefois, l'exercice 2 du TD est plus intéressant si on n'admet pas ces résultats. On s'abstiendra donc de les utiliser. Une démonstration à l'aide des résultats standard est néanmoins donnée à la fin de ce document, pour les élèves curieux/ses.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ quelconque. Notons $E_x = \{x^q, q \in \mathbb{Q}\}$ et démontrons que E_x est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

On commence par traiter le cas où $x > 1$. Nous devons montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$,

$$E_x \cap]a; b[\neq \emptyset.$$

Fixons $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^{-n_0} < a.$$

Un tel entier existe puisque $x^{-n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $0 < a$ (donc $x^{-n} < a$ pour tout n assez grand).

Soit $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x < \left(\frac{b}{a}\right)^{m_0}.$$

Un tel entier existe puisque $\left(\frac{b}{a}\right)^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On observe que

$$\left(x^{\frac{1}{m_0}}\right)^{m_0} = x < \left(\frac{b}{a}\right)^{m_0},$$

donc, comme la fonction $t \to t^{m_0}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^{\frac{1}{m_0}} < \frac{b}{a}$.

Définissons maintenant l'ensemble

$$M = \{k \in \mathbb{N}, x^{-n_0 + \frac{k}{m_0}} < b\}.$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$. Il est non-vide car il contient 0 (puisque $x^{-n_0} < a < b$). De plus, il est majoré. En effet,

$$x^{-n_0 + \frac{k}{m_0}} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ assez grand, $k \notin M$. On sait que tout sous-ensemble non-vide et majoré de $\mathbb{N}$ contient un maximum. Soit donc $k_0 = \max M$.

D'après la définition de M,

$$x^{-n_0+\frac{k_0}{m_0}} < b.$$

De plus, comme $k_0 + 1 \notin M$,

$$x^{-n_0+\frac{k_0+1}{m_0}} \geq b,$$

d'où

$$\begin{aligned} x^{-n_0+\frac{k_0}{m_0}} &= \frac{x^{-n_0+\frac{k_0+1}{m_0}}}{x^{\frac{1}{m_0}}} \\ &\geq \frac{b}{x^{\frac{1}{m_0}}} \\ &> \frac{b}{b/a} \\ &= a. \end{aligned}$$

Ainsi, $a < x^{-n_0+\frac{k_0}{m_0}} < b$. On a donc trouvé un élément de

$$E_x \cap]a; b[,$$

ce qui montre que cet ensemble n'est pas vide. La densité est ainsi démontrée, sous l'hypothèse que $x > 1$.

Traitons pour finir le cas où $x < 1$. On observe que

$$\begin{aligned} E_x &= \{x^q, q \in \mathbb{Q}\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{x}\right)^{(-q)}, q \in \mathbb{Q} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{x}\right)^{q'}, q' \in \mathbb{Q} \right\} \\ &= E_{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{x} > 1$, $E_{\frac{1}{x}}$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble E_x est donc dense aussi.

Démonstration plus courte en utilisant les propriétés usuelles de exp et ln : soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ quelconque. Pour montrer la densité de E_x, il suffit de montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_x telle que

$$y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.$$

Soit donc $y \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels telle que

$$q_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(y)}{\ln(x)}.$$

Une telle suite existe puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $y_n = x^{q_n}$. Alors, en utilisant la continuité de la fonction exponentielle, on obtient

$$y_n = e^{q_n \ln(x)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{\ln(y)}{\ln(x)} \ln(x)} = y.$$

On a bien trouvé une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_x qui converge vers y.