

Exercices d'algèbre 1

Mode d'emploi :

- bon nombre d'exercices ne seront pas traités en TD.
- les exercices précédés de "Tous TD" ou "Cours" doivent être faits dans tous les groupes de TD.
- les résultats des exercices précédés de "Cours" sont à connaître et peuvent être utilisés directement lors des contrôles, comme s'ils figuraient dans le cours.
- les exercices précédés de (*) sont en général assez faciles et doivent être préparés à la maison. C'est un strict minimum et il est conseillé de préparer également d'autres exercices.
- il faut apprendre son cours avant d'essayer de faire les exercices ; d'autre part, il est plus formateur de comprendre à fond quelques exercices que d'en comprendre beaucoup à moitié.

1 Exercices sur la logique et énigmes

Exercice 1.1 (*) (sens et négation du OU et du ET)

Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 1.2 (*) (négation du OU et du ET) Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geq 0$)

Exercice 1.3 (énoncés avec l'ensemble vide) Soit A une partie de \mathbb{R} . Soit P la proposition "Pour tout réel x dans A , $x^2 \geq 12$ ". Nier P . On suppose maintenant que $A = \emptyset$. La négation de P est-elle vraie ou fausse ? P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 1.4 (*) (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement .

Exercice 1.5 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (Tous TD) (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x , si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n , si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x , si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x , $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$

(pour le 4., on pourra se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.7 (*) (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n , il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n , $x > 2n$
3. Pour tout réel x , pour tout réel y , si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x , pour tout réel positif y , si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.8 (Tous TD) (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.9 (Tous TD) Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression " x est la fille de y ", où x et y sont des femmes. Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous).

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit "pour tout y dans F , il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \text{non}P(x, y)$

Exercice 1.10 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{\text{Jean, Julie}\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{\text{algèbre, analyse, économie}\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F , on désigne par $P(x, y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y ".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x, y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

Par exemple, la première proposition se lit "Pour tout élément x de E , pour tout élément y de F , x a la moyenne dans la matière y ". En français courant, on dirait "Tous les étudiants ont la moyenne dans toutes les matières". C'est faux, puisque Jean n'a pas la moyenne en analyse.

Exercice 1.11 (Cours) Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ϵ , on a $|a| < \epsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 1.12 Donner, en français courant, un exemple de ou inclusif et un exemple de ou exclusif. En mathématiques, le ou est-il inclusif ou exclusif?

Exercice 1.13 Soit E un ensemble. Soient $P(x)$ (respectivement, $Q(x)$) un énoncé qui, pour toute valeur donnée à x dans E , est soit vrai soit faux. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $(\forall x \in E, P(x) \text{ ou } \forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))$.

2) S'il existe x dans E tel que $(P(x) \text{ ou } Q(x))$ alors (il existe x dans E tel que $P(x)$ ou il existe x dans E tel que $Q(x)$)

Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies?

Exercice 1.14 (Tous TD) (*Un problème courant dans la rédaction des récurrences*) Supposons qu'on veuille démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $2^n \leq 3^n$. Corrigez la rédaction suivante :

Soit $P(n)$ la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 3^n$. $P(0)$ est vraie car blah blah. Soit n dans \mathbb{N} . Supposons $P(n)$ vraie. Alors blah blah blah donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $2^n \leq 3^n$ pour tout entier naturel n .

Exercice 1.15 Une récurrence erronée. On considère des boîtes de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boîte quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur?

Dans une boîte d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans \mathbb{N}^* . Prenons une boîte de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayon mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boîte ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie?

Exercice 1.16 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
- 2) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
- 3) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
- 4) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
- 5) Il existe un unique entier relatif n tel que $n^2 = 1$.
- 6) Il existe au plus un entier relatif n tel que $n^2 = 1$.

Voyage sur l'île de Puro-Pira (à faire à la maison, les solutions seront mises en ligne).

Le type d'énigme qui suit a été popularisé notamment par le logicien Raymond Smullyan, dont je vous conseille vivement les livres. Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégories de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île. Il se peut que ce soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire, ... Tout est possible. De plus, les questions sont indépendantes (donc il se peut que Bernard soit un Pire dans la question 1 et un Pur dans la question 2). Sauf indication contraire, votre but est de déterminer le type des habitants que vous rencontrez. Cela ne sera pas toujours possible, mais presque. Pour vous aider, les réponses aux quatre premières questions sont données dans les notes de bas de page.

On rappelle que "Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q". Donc si un Pur dit "Si P alors Q", c'est que P est fausse ou Q est vraie. Si un Pire dit "Si P alors Q", c'est que P est vraie et Q est fausse. D'autre part, dans ce qui suit et comme toujours en mathématiques, le "ou" est inclusif.

Rencontre 1. Bernard vous dit : "Nous sommes tous les deux des Pires". Qu'en déduisez-vous ? ¹

Rencontre 2. Alice vous dit : "Je suis une Pure et Bernard est un Pire". Que peut-on en déduire ? ²

Rencontre 3. Alice vous dit : "Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire". Qu'en déduisez-vous ? ³

Rencontre 4. Alice dit : "Je suis une Pure ou Bernard est un Pur." Bernard dit : "Nous ne sommes pas du même type." ⁴

A vous de résoudre les énigmes suivantes.

Question 5 :

- a) trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire ;
- b) trouver une phrase qui peut-être dite par un Pur mais aussi par un Pire.

¹Réponse : un Pur ne pourrait pas dire ça. Donc Bernard est un Pire. Donc ce qu'il dit est faux. Donc Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Pires. Or Bernard est un Pire. Donc Alice est une Pure.

²Réponse : la seule chose que l'on puisse en déduire, c'est qu'Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Purs.

³Réponse : Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Supposons qu'Alice soit une Pire. Alors ce qu'elle dit est vraie (rappelez-vous que si P est fausse alors nonP est vraie, donc nonP ou Q est vraie, donc par définition "si P alors Q" est vraie). Donc Alice est une Pure. Contradiction. Notre supposition initiale était donc fausse. Donc Alice est une Pure. Donc ce qu'elle dit est vraie. Donc Bernard est un Pire.

⁴Alice et Bernard sont tous les deux des Pires. En effet, supposons qu'Alice soit une Pure. Alors il y a deux cas : 1er cas, Alice et Bernard sont tous les deux des Purs. Alors Bernard dit la vérité, donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type". Contradiction. 2ème cas, Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Alors Bernard ment toujours. Donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type", puisque c'est vrai. Contradiction. Donc supposer qu'Alice est une Pure mène à une contradiction. Donc Alice est une Pire. Donc ce qu'elle a dit est faux. Donc Alice et Bernard sont tous les deux des Pires.

Rencontre 6. Alice dit : "Je ne suis ni une Pure ni une Pire." Bernard dit : "C'est vrai!"

Rencontre 7. Chloé est une habitante de l'île de Puro-Pira.

Vous : "Est-ce que Bernard et Chloé sont tous les deux des Purs?"

Alice : "Oui."

Vous : "Est-ce que Bernard est un Pur?"

Alice : "Non."

Rencontre 8. Entre Alice, Bernard et Chloé, l'un des trois est le chef du village.

Alice : "C'est moi le chef."

Bernard : "C'est moi le chef."

Chloé : "Au plus l'un de nous trois dit la vérité."

Qui est le chef?

Question 9 (difficile). Sur l'île des Purs et des Pires, on a volé un cheval. Il y a 4 suspects (dont un et un seul est coupable) : Alice, Bernard, Chloé et David. Les 3 premiers sont présents au tribunal, le 4ème, David, n'a pas encore été pris. Le juge, qui est un Pur et raisonne parfaitement, pose la question : "Qui a volé le cheval?". Voici les réponses :

Alice : "C'est Bernard qui a volé le cheval."

Bernard : "C'est Chloé qui a volé le cheval."

Chloé : "C'est David qui a volé le cheval."

Alors, l'un des 3 accusés dit : "Les 2 autres mentent!". Le juge réfléchit et après quelques instants, il désigne l'un des 3 et lui dit : "Vous ne pouvez pas avoir volé le cheval, vous êtes libre." Qui est-ce ?

L'audience se poursuit après le départ de l'innocent. Le juge demande à l'un des 2 si l'autre est un Pur et après qu'on lui a répondu par OUI ou par NON, il sait qui a volé le cheval. Qui est-ce ?

Des Espions sur l'île de Puro-Pira.

L'île de Puro-Pira a été infiltrée par des Espions. Ceux-ci peuvent dire la vérité, mentir, dire des choses paradoxales : tout est possible. Vous savez que parmi Alice, Bernard et Chloé, il y a exactement un Pur, un Pire, et un Espion. Vous devez devinez qui est quoi.

Rencontre 10.

Alice : "Je suis une Pure."

Bernard : "Je suis un Pire."

Chloé : "Bernard n'est pas un Pur."

Rencontre 11.

Alice : "Je suis une Pure."

Bernard : "Je suis un Pire."

Chloé : "Alice est une Espionne."

Rencontre 12.

Alice : "Je suis une Pure."

Bernard : "Alice est une Pure."

Chloé : "Si vous me posiez la question, je vous dirais qu'Alice est une Espionne."

2 Ensembles, raisonnement, indices

Exercice 2.1 (*) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$
 c) $\exists x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ et } x = -|x|)$ d) $(\exists x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

Exercice 2.2 (*) (ensembles : définitions) Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$. Calculer $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C_A(B)$ et $B \setminus C$.

Exercice 2.3 (*) (ensembles : définitions) Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 2.4 (*) (ensembles : définitions) Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élément. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 2.5 (Cours) (propriétés des ensembles) Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A . Démontrer les propriétés suivantes : a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; b) $C_A(C_A(X)) = X$; c) $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$; d) $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 2.6 (une rédaction confuse conduit à des erreurs) Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

"Pour tout réel x , $(x - 2)(x - 1) \neq 0 \iff x \neq 2, x \neq 1$, or x ne peut pas être égal à la fois à 2 et à 1, donc pour tout réel x , $(x - 2)(x - 1)$ est non nul".

Exercice 2.7 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

Exercice 2.8 (*) (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel n , si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 2.9 (Cours) Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 2.10 (Tous TD) (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 2.11 (Tous TD, au moins en partie) (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E . Soient \bar{A} et \bar{B} leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \subset B$ (ii) $A \cap B = A$ (iii) $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}$ (iv) $A \cap \bar{B} = \emptyset$
 (v) $\bar{A} \cup B = E$ (vi) $\bar{B} \subset \bar{A}$ (vii) $\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B}$ (viii) $A \cup B = B$

Exercice 2.12 (Tous TD) (indices : définitions) Pour tout entier relatif k , on pose $a_k = k^2$. Calculer les sommes suivantes :

- a) $\sum_{k=2}^4 a_k$; b) $\sum_{k=4}^2 a_k$; c) $\sum_{k=1}^3 a_{2k-5}$; d) $\sum_{k=1}^3 k a_k$; e) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 2 \leq k^3 \leq 100\}} a_k$; f) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq 3k \leq 10\}} a_{2k-5}$

Exercice 2.13 (Tous TD, au moins a) et c)) (récurrences) Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

$$a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad c) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 2.14 (*) (indices : définitions) Pour tout entier relatif k , on pose $A_k = [k, k + 10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

$$\text{a) } \bigcup_{k=3}^9 A_k; \quad \text{b) } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k; \quad \text{c) } \bigcap_{k=3}^9 A_k; \quad \text{d) } \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Exercice 2.15 (*Tous TD*) (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

$$\text{a) } \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]; \quad \text{b) } \bigcup_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[; \quad \text{c) } \bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[; \quad \text{d) } \bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left[\frac{1}{x}, x \right]$$

Exercice 2.16 (*Tous TD*) (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Exercice 2.17 (*Tous TD*) (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?

Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?

Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 2.18 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A .

a) Donner un exemple où : $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.

b) Donner un exemple où : $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.

c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \implies Y = Z.$$

Exercice 2.19 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0, 1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F .

Exercice 2.20 Pour tout entier naturel p , on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans \mathbb{N} .

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q ,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q ,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 2.21 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E . Soit \bar{A} le complémentaire de A dans E . Montrer les propriétés suivantes :

$$\text{a) } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad \text{b) } A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Exercice 2.22 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E , on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Soient A , B et C des parties de E . Montrer que :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ A\Delta\emptyset &= A, \quad A\Delta B = B\Delta A, \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \\ A \cap (B\Delta C) &= (A \cap B)\Delta(A \cap C) \end{aligned}$$

Exercice 2.23 (note aux chargés de TD : les notations \min et \max ne sont pas forcément connus à ce stade) Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1 \leq i \leq n} (\max_{1 \leq j \leq p} a_{ij}), \quad B = \max_{1 \leq j \leq p} (\min_{1 \leq i \leq n} a_{ij})$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 2.24 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de parties d'un ensemble E . Les ensembles $\bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} A_{ij} \right)$ et $\bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{ij} \right)$ sont-ils égaux? L'un est-il inclus dans l'autre.

Exercice 2.25 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 2.26 (*) (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes $\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2}$ et $\sum_{k=4}^{n+3} x^{k-2}$.

3 Applications

Exercice 3.1 (*) Soient $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{0, 1\}$. Donner des exemples d'applications de A dans B . Combien y-a-t-il de telles applications? Mêmes questions pour les applications de B dans A .

Exercice 3.2 (*) Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x , $f(x) = x^2$. Déterminer :
 a) $f([-1, 1])$, $f([0, 3[)$, $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_-)$; b) $f([-2, 0] \cap [0, 2])$ et $f([-2, 0]) \cap f([0, 2])$ (comparez!);
 c) $f^{-1}([0, 3])$, $f^{-1}([-10, 3])$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

Exercice 3.3 (Tous TD) Soit l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x , $g(x) = \sin x$. Sans justifier, donner :

$$\text{a) } g([0, 2\pi]), g(\mathbb{R}), g([0, 10]) \text{ et } g([0, \frac{\pi}{2}]); \quad \text{b) } g^{-1}([2, +\infty[), g^{-1}(\mathbb{R}), g^{-1}([-1, 1]) \text{ et } g^{-1}([-1, 1]).$$

Exercice 3.4 (*) Les applications suivantes sont-elles bien définies? Si oui, sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

- 1) $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 8, -1, 24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.
- 2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto -n$
- 3) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n + 1$
- 4) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n - 1$
- 5) $f : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, +1\}$ qui à tout n de \mathbb{N} associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 3.5 (*) Pour chacune des applications 1), 2), 3) et 5) de l'exercice précédent, calculer : $f(\{2\})$, $f(\{0, 2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1, 1\})$.

Exercice 3.6 (*Tous TD*) a) Quelle est l'allure du graphe des applications suivantes ? Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? (note aux chargés de TD : c'est l'occasion d'expliquer comment on lit sur le graphe de f les solutions dans de l'équation $f(x) = y$, et si f est injective, surjective ou ni l'un ni l'autre. Attention : répondre lors d'un examen : "l'application f est injective car son graphe a telle propriété", sans prouver rigoureusement que le graphe a cette propriété ne vaudra pas tous les points.)

b) Pour celles qui sont bijectives, quelle est leur application réciproque ?

c) Pour chacune de ces applications, déterminer l'image et l'image réciproque de l'intervalle $[2, 3]$.

$$1) f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2) f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad 3) f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad 4) f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 5) f_5 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 + 1 \quad x \mapsto x^3 + 1 \quad x \mapsto 1/x^2$$

Exercice 3.7 Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1) g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \quad 2) g_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad 3) g_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad 4) g_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Exercice 3.8 Soit f une application de A vers B . Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 3.9 (*Cours*) (note aux chargés de TD : pas fait en amphi, mais fait dans le polycopié : n'y revenir que si cela semble utile) Soit f une application de E vers F . Soient A et A' des parties de E . Soient B et B' des parties de F . Montrer que :

$$1) A \subset f^{-1}(f(A)) \quad 2) f(f^{-1}(B)) \subset B$$

$$3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \quad 4) f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

$$5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Donner des exemples montrant que les inclusions du 1), du 2) et du 4) peuvent être strictes

Exercice 3.10 (*) Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications (pas forcément bijectives). Soient $A \subset E$ et $C \subset G$. Montrer que $g \circ f(A) = g(f(A))$ et que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Exercice 3.11 (*Tous TD*) Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x \in f(E)$.

Exercice 3.12 (*) Sans justifier, dire quelles applications de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 correspondent aux transformations du plan suivantes (le plan est supposé muni du repère orthonormé usuel) :

a) la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice du plan ;

b) la symétrie orthogonale par rapport à la seconde bissectrice du plan ;

c) la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$;

d) La projection sur l'axe des ordonnées ;

e) La translation de vecteur $2\vec{i} + \vec{j}$, où \vec{i} et \vec{j} sont respectivement les vecteurs directeurs usuels de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

Exercice 3.13 (*Tous TD*) Soient I et J des parties de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ une application bijective. Montrer que le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice du plan.

Exercice 3.14 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A . Soient A et B deux parties de E . Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.

Exercice 3.15 L'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto xe^{-x}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3.16 (*Tous TD*) (retour sur la logique) Soient f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que pour tout réel x , $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, f^2(x) < g^2(x)\}$. On considère les deux propositions suivantes :

P1 : "Pour tout x dans A , $f(x) < g(x)$ "

P2 : "Il existe x dans A tel que $f(x) < g(x)$ "

a) La proposition P1 est-elle forcément vraie (c'est à dire vraie pour toutes fonctions f et g satisfaisant les hypothèses de l'énoncé) ?

b) La proposition P2 est-elle forcément vraie ? Si oui, le prouver ; sinon, donner un contre-exemple (c'est à dire un exemple d'applications f et g pour lesquelles la proposition est fausse).

c) Soit E un ensemble et pour tout x dans E , soit $P(x)$ une proposition. On suppose que la proposition "Pour tout x dans E , $P(x)$ " est vraie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour que la proposition "Il existe x dans E tel que $P(x)$ " soit vraie.

Exercice 3.17 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (f(x), g(x))$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?

c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 3.18 (*) Soient

$$f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{|x|}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?

b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 3.19 (*) Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 3.20 (*) L'application suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, p) \mapsto n + p$$

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f(\mathbb{N} \times \{2\})$ et $f(2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N})$ où $k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3.21 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 3.22 (*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} injective mais non monotone.

Exercice 3.23 L'application

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$$

est-elle injective, surjective? bijective?

Exercice 3.24 Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

$$1) f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2) f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \quad 3) f_3 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \quad 4) f_4 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \sin x$$

Exercice 3.25 Mêmes questions que dans l'exercice précédent pour les applications suivantes.

$$a) g_1 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad b) g_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \quad c) g_3 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \quad d) g_4 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \tan x \quad x \mapsto \tan x$$

Exercice 3.26 Soit f une application de E vers F . Démontrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 3.27 Soit f une application de E vers F et A une partie de E .

- Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.
- Toutefois, démontrer : f bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 3.28 a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement décroissante?

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.

c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.

d) (relativement difficile) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.29 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 3.30 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

4 Ensembles finis et infinis

Exercice 4.1 (*) (note aux chargés de TD : ne faire que quelques questions : un corrigé sera distribué) Répondre aux questions de la feuille "Injections et surjections dans la vie quotidienne".

Exercice 4.2 Pourquoi est-il équivalent de dire qu'il existe une bijection de E dans F , et de dire qu'il existe une bijection de F dans E ?

Exercice 4.3 (*note : sans doute fait en probabilités discrètes, n'y revenir que si cela semble utile*) Montrer en revenant à la définition qu'une réunion d'ensembles finis est finie (on pourra commencer par la réunion de deux ensembles disjoints, puis de deux ensembles quelconques).

Exercice 4.4 Montrer qu'un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est dénombrable. Montrer qu'un ensemble en bijection avec un ensemble non dénombrable est non dénombrable.

Exercice 4.5 (*Cours : le résultat est à connaître, pas la preuve*) Soit E un ensemble fini ou infini. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (indication : soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. Considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$). En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4.6 (*) (ensembles infinis) : on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que l'application suivante est bijective.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow 2\mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Exercice 4.7 (*Tous TD*) (ensembles infinis) : soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application donnée par $f(n) = -n/2$ si n est pair, et $g(n) = (n+1)/2$ si n est impair. Montrer que l'application g est bijective.

Exercice 4.8 (*Tous TD*) Exercice (ensembles infinis) : en admettant le résultat des deux exercices précédents, déterminer une bijection entre $2\mathbb{N}$ et \mathbb{Z} .

Exercice 4.9 (*note aux chargés de TD : preuve faite dans la section "compléments" du polycopié de cours, expliquer juste l'idée graphiquement*) Soient E et F des ensembles (finis ou infinis). Montrer qu'il existe une injection de E vers F si et seulement si il existe une surjection de F vers E .

Exercice 4.10 ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable) (Preuve dans le polycopié de cours, section "Compléments")

a) En raisonnant sur un dessin, expliquer pourquoi, intuitivement, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

b) La bijection entre \mathbb{N} et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui se "voit" sur un dessin est un peu longue à formaliser. C'est pourquoi nous allons en considérer une autre. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ l'application donnée par, pour tous $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n, p) = 2^n(2p+1)$. Montrer que f est bijective. En déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (cette preuve m'a été suggérée par Saber Trabelsi, que je remercie).

Exercice 4.11 (une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable : la preuve - hors programme - est dans le polycopié de cours) On admet que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Soit I un ensemble dénombrable. Pour tout i dans I , soit A_i un ensemble dénombrable. On suppose que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Exercice 4.12 On admet que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Montrer que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{N}^p est dénombrable.

Exercice 4.13 (*difficile*) Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynôme (resp. une fonction polynôme à coefficients rationnels) s'il existe un entier n et des réels (resp. des rationnels) a_0, \dots, a_n tels que pour tout réel x , $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. Une racine d'une telle fonction polynôme est un réel x tel que $f(x) = 0$. On admet qu'une fonction polynôme a un nombre fini de racines. Montrer que l'ensemble des racines de fonctions polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. On pourra utiliser qu'un produit d'ensembles dénombrables est dénombrable, qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, et que deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.