Eléments de théorie des contrats :

Le modèle principal-agent avec action cachée, partie I [1]

Avertissement : il est très probable que, malgré les efforts de l'auteur, des fautes de frappes subsistent dans ce polycopié. Merci de signaler les plus gênantes à l'adresse viossat@ceremade.dauphine.fr.

1 Introduction 1 : incitation et aversion au risque

Considérons un client qui cherche à employer un avocat pour le défendre dans un procès. Plus l'avocat passera de temps à étudier le dossier, plus le client aura de chances de gagner le procès. On peut donc supposer que le client serait prêt à signer un contrat stipulant qu'il paiera un salaire élevé à l'avocat si celui-ci consacre un temps important à son dossier. Si, à un coût faible, le client peut observer et faire constater par un juge le travail fourni par l'avocat, un contrat de ce type est envisageable et a priori efficace. Il paraît toutefefois plus probable que le client ne puisse pas savoir si l'avocat a fait sérieusement son travail, ou tout du moins qu'il ne puisse rien prouver. Cela crée un problème dit d'aléa moral : l'avocat peut prétendre qu'il va étudier le dossier à fond et ne pas le faire ; le client ne pourra pas se retourner contre lui.

Pour inciter l'avocat à faire des efforts, le client peut faire dépendre la rémunération de l'avocat du résultat du procès. Toutefois, une autre difficulté apparaît : le résultat du procès ne dépend pas que des effort de l'avocat ; il dépend aussi de facteurs aléatoires, comme l'humeur du juge le jour du jugement, les efforts de l'avocat de la partie adverse, la découverte fortuite d'une pièce compromettante, etc. Si le client propose à l'avocat un salaire élevé s'il gagne le procès, mais très faible s'il le perd, l'avocat pourrait refuser par crainte de travailler pour rien.

En supposant que l'avocat a de l'aversion pour le risque, il y a une tension entre le fait de l'inciter à l'effort en le rémunérant davantage s'il gagne le procès que s'il le perd, et le fait de rendre le contrat acceptable par l'avocat en le prémunissant contre un risque trop élevé. C'est cette tension et les inefficacités qui en résultent que nous allons étudier dans ce chapitre. Citons quelques autres exemples de relations économiques ayant une structure similaire :

- le propriétaire de terres et l'agriculteur : l'agriculteur peut cultiver les terres du propriétaire, en faisant plus ou moins d'efforts. Seule la production agricole finale est observable, et celle-ci ne dépend pas que des efforts de l'agriculteur. Pour inciter l'agriculteur à l'effort, le propriétaire foncier peut rémunérer le fermier en fonction de la production obtenue, par exemple en lui donnant un pourcentage de la production ; mais ceci fait courir des risques à l'agriculteur, qui peuvent l'amener à refuser ce type de rémunération. En pratique, plusieurs types de contrats sont utilisés, dont le fermage (l'agriculteur reçoit un salaire fixe) et le métayage (l'agriculteur reçoit une partie de la récolte, anciennement la moitié, d'où le nom).

[1] Ces notes, très incomplètes, s'inspirent de notes de Françoise Forges, du livre de Jean-Jacques Laffont et David Martimort (*The Theory of Incentives : The Principal-Agent Model*, Princeton University Press, 2001), d'un polycopié de Thierry Granger, et du polycopié de Bernard Caillaud pour le cours de microéconomie avancée donné à l'Ecole polytechnique.

- l'assureur et l'assuré : l'assureur souhaite que l'assuré fasse des efforts pour ne pas subir de dommages, et peut proposer dans ce but un contrat avec franchise, ou de ne rembourser qu'un pourcentage du dommage. Mais dans ce cas, l'assuré ne sera pas entièrement couvert, et cela peut l'amener à ne pas être intéressé par l'offre de l'assureur.

- l'employeur et le vendeur : un vendeur peut faire plus ou moins d'efforts pour trouver des clients. Souvent, ces efforts ne sont pas observables, et seules les ventes le sont. L'employeur peut rémunérer le vendeur en fonction des ventes qu'il conclut, mais cela fera courir des risques au vendeur.

Citons encore : le propriétaire qui cherche à vendre sa maison et l'agence immobilière ; l'actionnaire et le manager ; l'Etat et le chercheur ; l'électeur et l'Etat ; et d'une manière générale, l'employeur et l'employé.

2 Introduction 2 : une histoire de pêcheurs

Considérons la situation suivante : vous dirigez une entreprise de pêche qui emploie de nombreux pêcheurs. Vous souhaitez embaucher un pêcheur supplémentaire. La quantité de poisson qu'il rapporte dépend à la fois du temps qu'il passe en mer et de facteurs aléatoires. L'utilité du pêcheur est de la forme $u(w, k) = u(w) - kc$, où w est sa rémunération, k le nombre d'heures par jour qu'il passe à travailler et c la désutilité par heure de travail.

De plus, la pêche étant un métier éprouvant, le pêcheur subit une désutilité de c fois le nombre d'heures qu'il passe à pêcher chaque jour ; en suposant que son utilité dépend de manière additive du salaire qu'il reçoit et de la désutilité lié à l'effort, son utilité s'il travaille pendant k heures par jour et recoit un salaire quotidien de w sera donc $u(w, k) = u(w) - kc$. Votre but est de proposer un contrat qui vous coûte le moins cher possible, en espérance, et qui incite le pêcheur à travailler 8h par jour. En supposant que le pêcheur a de l'aversion pour le risque et qu'il n'accepte un contrat que s'il lui permet d'obtenir une espérance d'utilité au moins égale à u_r (son utilité de réserve), quel type de contrat devez-vous proposer ? En particulier, devez-vous lui verser un salaire fixe ou un salaire qui dépende de la quantité de poisson qu'il rapporte ?

La réponse dépend de l'information que vous pouvez obtenir (et utiliser) sur l'effort de l'agent, c'est à dire ici sur le nombre d'heures qu'il passe à pêcher.

Supposons tout d'abord que vous pouvez observer, et si besoin est faire constater par un tribunal, le nombre d'heures pendant lequel le pêcheur pêche. Vous pouvez alors offrir un contrat du type suivant : si tu pêches 8h par jour, tu recevras le salaire fixe w tel que $u(w) - 8c = u_r$; sinon, tu seras licencié, où tu encourras une amende suffisamment dissuasive. Ce contrat est acceptable pour l'agent (il lui permet d'obtenir l'utilité u_r), et s'il l'accepte, il sera bien incité à travailler 8h par jour. De plus, parmi les contrats qui ont ces propriétés, c'est celui qui vous revient le moins cher. C'est donc le contrat optimal.[2]

[2]En effet, supposons que vous proposiez un autre contrat, pas forcément de type salaire fixe, au pêcheur ; pour un effort fixé, le salaire que reçoit le pêcheur peut se voir comme une loterie (c'est une loterie certaine si le contrat est du type salaire fixe, et une loterie risquée sinon). Soit l cette loterie dans le cas où l'agent fait l'effort demandé. Pour que l'agent accepte le contrat et travaille 8h par jour, il faut que cela lui procure une espérance d'utilité d'au moins $u_r = u(w^*) - 8c$, donc que son salaire espéré (la loterie l) lui procure une espérance d'utilité d'au moins $u_r + 8c = u(w^*)$ donc que l'équivalent certain de l soit au moins égal à w^*, donc que l'espérance de gain de l (i.e. le salaire moyen) soit au moins égal à w^*. Si vous n'arrivez pas à voir en quoi le salaire que reçoit l'agent peut s'apparenter à une loterie,

Supposons maintenant que vous ne puissiez pas observer l'effort du pêcheur, ou tout du moins que vous ne puissiez pas faire dépendre directement le salaire de l'agent de son effort. Par exemple parce qu'il va pêcher seul en Alaska et que vous ne pouvez pas observer ce qu'il y fait. Pour clarifier la situation, nous supposerons que l'interaction n'est pas répétée : le pêcheur part au loin pour toute la saison, ce n'est qu'à son retour que vous saurez ce qu'il a pêché ; de plus, vous savez qu'après cette saison il prendra sa retraite, qu'il n'habite pas la même région que vous, et que vous ne le reverrez pas.

Puisque vous n'observez pas l'effort, la seule chose (sensée) que vous puissiez faire est de faire dépendre le salaire de l'agent de la quantité de poisson qu'il rapporte.[3] Si vous proposez au pêcheur un salaire fixe w quelle que soit la quantité de poisson qu'il rapporte, il n'aura aucune incitation à pêcher pendant $8h$ par jour. En effet, s'il le fait, il obtient une utilité $u(w) - 8c$, alors que s'il reste au chaud chez lui il obtient $u(w) > u(w) - 8c$. Pour inciter le pêcheur à faire l'effort souhaité, il faut donc faire dépendre son salaire de la quantité de poisson qu'il rapporte. Mais comme cette quantité de poisson ne dépend pas que de son effort mais aussi de facteurs aléatoires (il y a de bonnes et de mauvaises saisons), cela fera courir un risque à l'agent. Pour que l'agent accepte de courir ce risque, il faudra lui donner un salaire moyen plus élevé que dans la situation précédente et votre profit sera moindre. C'est l'un des messages essentiels de ce chapitre : pour inciter un agent à faire un effort élevé quand l'effort n'est pas directement observable, il faut faire courir un risque à l'agent, et pour que l'agent accepte le contrat, il faudra rémunérer ce risque. Le profit de la personne qui propose le contrat sera donc moindre quand l'effort de l'agent n'est pas observable que quand il l'est.[4]

Quant au contrat précis qu'il est optimal de proposer au pêcheur, avant de savoir le calculer, nous avons un bout de chemin intellectuel à faire ensemble.

3 Le modèle principal-agent avec action cachée

Nous cherchons à étudier les relations entre deux entités économiques dont l'une, le principal, peut employer l'autre, l'agent, pour réaliser une tâche. En échange, l'agent est rémunéré d'après un barème de rémunération (un contrat) fixé avant la réalisation de la tâche. Nous nous intéressons au modèle principal-agent avec action cachée (on dit aussi, avec aléa de moralité). Dans ce modèle, l'agent peut faire plus ou moins d'efforts pour accomplir sa tâche ; le principal ne peut pas observer cet effort, mais uniquement une grandeur qui dépend de l'effort mais aussi d'aléas. Pour fixer les idées, nous supposerons que cette grandeur est la production finale, et que le principal cherche à maximiser cette production finale nette du salaire versé à l'agent. Pour que le problème soit intéressant, nous supposerons que l'agent a de l'aversion pour le risque, et pour simplifier, que le principal est neutre au risque.

relisez cette note après avoir lu les sections suivantes.

[3]Si l'interaction était répétée la situation serait très différente. Par exemple, vous pourriez proposer au pêcheur un salaire fixe mais en le prévenant que vous ne le réembaucheriez l'année d'après que s'il rapporte au moins une certaine quantité de poisson.

[4]A noter que, comme nous le constaterons plus tard, si lorsque son effort n'est pas observable l'agent reçoit un salaire moyen plus élevé que quand l'effort est observable, en terme d'utilité, il obtient son utilité de réserve dans les deux cas. La situation où l'effort n'est pas observable est donc moins bonne pour celui qui propose le contrat sans être meilleure pour l'agent. Elle n'est pas Pareto optimale. On parle d'optimum de second rang.

Enfin, nous supposerons que le principal fait une offre à prendre ou à laisser à l'agent ; celui-ci ne peut donc pas faire de contre-offre. Ce n'est pas une position normative (nous n'affirmons pas qu'il est bon qu'il en soit ainsi) ni positive (nous n'affirmons pas qu'il en est ainsi en général). C'est une hypothèse simplificatrice, qui permet de ne pas avoir à modéliser le processus de négociation entre le principal et l'agent, ce qui serait très difficile.

On aurait pu faire l'hypothèse polaire, et supposer que c'est l'agent qui fait une offre à prendre ou à laisser au principal.[5] L'analyse aurait été similaire, mais le contrat final différent. En effet, dans le cas où le principal a tout le pouvoir de négociation (c'est lui qui fait l'offre), l'agent n'obtiendra pas mieux que son utilité de réserve ; dans le cas opposé, c'est le principal qui n'obtiendrait que son utilité de réserve.

Dans la version présente de ces notes, nous nous contentons d'analyser le modèle le plus simple qui soit : l'agent a deux niveaux d'effort possibles, et il y a deux niveaux de production ; il n'y a pas de contraintes sur les salaires qu'on peut verser à l'agent (on peut lui verser des salaires négatifs !) et la relation n'est pas répétée dans le temps.

Avant de préciser le modèle, et pour bien comprendre le problème qu'il y a à faire courir des risques à l'agent, voici quelques rappels d'économie de l'incertain.

4 Aversion pour le risque et prime de risque

Considérons un décideur qui doit choisir entre des loteries sur un ensemble I de résultats possibles. Nous supposerons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que les éléments w de I sont des richesses finales possibles pour l'agent. Nous supposerons également que le décideur préfère une richesse élevée certaine à une richesse faible certaine.

Le décideur est neutre au risque s'il est indifférent entre toutes les loteries qui lui donne la même espérance de richesse finale. Un agent a de l'aversion pour le risque si pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et d'espérance de gain $E_l(w)$, l'agent préfère recevoir la somme $E_l(w)$ à coup sûr que de participer à la loterie l. La somme EC_l telle que le décideur est indifférent entre recevoir EC_l à coup sûr et participer à la loterie l est l'*équivalent certain* de la loterie l. Pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et pour n'importe quel décideur qui a, strictement, de l'aversion pour le risque, $EC_l < E_l(w)$. La différence $E_l(w) - EC_l$ est la *prime de risque* associé à la loterie l (elle croît avec l'aversion au risque du décideur).[6]

Si l'on propose à un agent économique de ne pas recevoir un salaire fixe, mais un salaire variable qui dépend d'aléas qu'il ne contrôle pas complètement, cela lui fait courir un risque. Pour qu'un agent qui a de l'aversion pour le risque accepte de courir ce risque, il faut que ce risque soit rémunéré ; c'est à dire que le contrat permette à l'agent de recevoir un salaire espéré plus élevé que le salaire fixe qu'il pourrait se garantir par ailleurs.

[5] Dans le cas l'employeur et de l'employé, cette hypothèse serait naturelle dans un contexte de plein-emploi, où l'employé peut mettre les employeurs en concurrence. Dans le cas du propriétaire et de l'agence immobilière (resp. du client et de l'avocat), on peut imaginer que l'agence immobilière (resp. l'avocat) impose son barème de rémunération.

[6] Sous des hypothèses classiques, les préférences du décideur peuvent être représentées par l'espérance d'une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ (qui n'est pas unique). Le décideur est alors neutre au risque si u est affine (en particulier, si $u(w) = w$ pour tout w) ; il a de l'aversion pour le risque si u est concave.

5 Problème principal agent avec 2 efforts et 2 niveaux de production

5.1 Présentation du problème

La situation est la suivante : le principal propose un contrat à l'agent pour la réalisation d'un projet. Si l'agent accepte, il peut faire un effort faible ($e = B$) ou un effort élevé ($e = H$). Le succès du projet dépend de l'effort de l'agent ainsi que de facteurs aléatoires. La probabilité de succès du projet est de $\pi_H < 1$ s'il fait un effort élevé, et de $\pi_B < \pi_H$ s'il fait un effort faible.

$effort \diagdown issue$	Succès	Echec
H	π_H	$1 - \pi_H$
B	π_B	$1 - \pi_B$

Le profit du principal avant paiement de l'agent est de $\bar{q}$ si le projet réussit et de $\underline{q} < \bar{q}$ si le projet échoue. Le principal a donc a priori intérêt à ce que l'agent fasse un effort élevé.

Utilité du principal : le principal est neutre au risque. Sa fonction d'utilité est

$$u_P(q, w) = q - w$$

où q est le profit avant paiement de l'agent et w le salaire versé à l'agent. Si l'agent refuse le contrat, le principal obtient 0.

Utilité de l'agent : on suppose que la fonction d'utilité u_A de l'agent prend la forme séparable :

$$u_A(w, e) = u(w) - d_e$$

où $u(w)$ est l'utilité due au salaire et d_e la désutilité due à l'effort e fait par l'agent. Un effort élevé est plus coûteux qu'un effort faible : $d_H > d_B$. D'autre part, l'agent a de l'aversion pour le risque : la fonction u est strictement concave. Enfin, l'agent refuse tout contrat qui ne lui procure pas son utilité de réserve u_r.

Pour vérifier que vous avez compris la situation, essayez de décrire cette situation comme un jeu sous forme extensive. Pour vous aider, voici le déroulement dans le temps :

$T = 0$: le principal propose un contrat à l'agent.

$T = 1$: l'agent accepte ou refuse. S'il refuse, il obtient u_r et le principal 0. S'il accepte, le jeu continue.

$T = 2$: l'agent choisit son effort.

$T = 3$: le projet réussit ou échoue. Il en résulte le profit q pour le principal.

$T = 4$: en application du contrat, l'agent reçoit un salaire w. Le principal reçoit $q - w$. [7]

La question est de savoir quel contrat le principal doit proposer à l'agent.[8]

[7] Attention : w n'est pas l'utilité de l'agent mais son salaire ; l'utilité de l'agent est $u(w) - d_e$, où e est l'effort choisi à la période 2. Il faut bien faire la distinction entre l'issue d'une interaction - qui correspond pour l'agent à un effort fourni et un salaire reçu - et l'évaluation de cette issue en terme d'utilité. Cette distinction était masquée dans le cours de théorie des jeux car on raisonnait directement sur les utilités.

[8] Même si cela ne sera pas explicite dans les sections suivantes, résoudre ce problème revient à calculer le ou les équilibres sous-jeux parfait du jeu précédent, et nous procéderons par induction à rebours.

5.2 Forme générale du raisonnement

5.2.1 Comportement de l'agent

Etant donné un contrat qui est proposé à l'agent, notons $u_A(e)$ l'espérance d'utilité de l'agent s'il accepte le contrat et choisit l'effort e.[9] L'agent a trois possibilités :

1) refuser le contrat, il obtient alors u_r ;

2) accepter le contrat et faire l'effort faible : il obtient alors $u_A(B)$

3) accepter le contrat et faire l'effort élevé : il obtient alors $u_A(H)$.

L'agent compare ces trois nombres, et choisit la possibilité qui lui donne la plus grande utilité. Le choix de l'agent dépend du contrat qui lui est proposé, puisque $u_A(B)$ et $u_A(H)$ en dépendent.

5.3 Comportement du principal

On suppose que le principal connaît la fonction d'utilité de l'agent et les probabilités de succès du projet pour les différents efforts que peut fournir l'agent. De plus, il sait que l'agent est rationnel. Il peut donc prévoir le comportement de l'agent. Le principal peut proposer à priori un nombre infini de contrats, mais qu'on peut classer dans trois grandes catégories :

1) ceux qui n'intéressent pas l'agent, car ils ne lui permettent pas d'obtenir son utilité de réserve.

2) ceux qui incitent l'agent à accepter et à faire l'effort faible.

3) ceux qui incitent l'agent à accepter et à faire l'effort élevé.

Pour faire son choix, le principal :

a) détermine le meilleur contrat parmi ceux qui induisent la participation de l'agent et l'effort faible, et calcule l'utilité $u_P(B)$ qu'il en tire.[10]

b) détermine le meilleur contrat parmi ceux qui induisent la participation de l'agent et l'effort élevé, et calcule l'utilité $u_P(H)$ qu'il en tire.

c) compare 0 (l'utilité obtenue en proposant un contrat inacceptable), $u_P(B)$ et $u_P(H)$.

Supposons pour simplifier que les trois nombres 0, $u_P(B)$ et $u_P(H)$ soient tous différents. Si le plus grand de ces nombres est 0, le projet n'est pas profitable : le principal ne propose rien à l'agent (ou un contrat inacceptable). Si c'est $u_P(B)$ (resp. $u_P(H)$), il propose le meilleur contrat induisant l'effort faible (resp. élevé).

La méthode se généralise, avec quelques subtilités, à un nombre quelconque d'efforts possibles.

5.4 Situation de référence 1 : effort observable

Dans ce cas, obtenir de l'agent un effort donné e ne pose pas de problème. Il suffit de lui proposer un contrat stipulant que si l'agent fait l'effort e, il recevra le salaire w ; sinon, il sera licencié (ou encourra une amende suffisamment importante pour être dissuasive).[11] La plus petite valeur de w

[9] On suppose que l'agent connaît le contrat et les probabilités de succès du projet conditionnellement aux différents efforts qu'il peut fournir. Il peut donc calculer les espérances d'utilité $u_A(B)$ et $u_A(H)$.

[10] Par *meilleur contrat*, nous entendons le meilleur pour le principal, celui qui lui donne l'espérance de profit après salaire la plus élevée. Un contrat *induit la participation de l'agent* s'il permet à l'agent d'obtenir au moins son utilité de réserve. Il *induit l'effort faible* si, face à ce contrat, l'agent préfère faire un effort faible qu'un effort élevé.

[11] On pourrait imaginer que le contrat stipule que, dans le cas où l'agent fait bien l'effort demandé, sa rémunération dépende néanmoins de facteurs aléatoires (par exemple le succès ou l'échec du projet, le résultats des prochaines

pour laquelle l'agent accepte le contrat est celle qui lui donne son utilité de réserve u_r, compte tenu de la désutilité due à l'effort. Le salaire optimal w_e vérifie donc $u(w_e) = u_r + d_e$, c'est à dire :

$$w_e = u^{-1}(u_r + d_e).$$

Le profit correspondant du principal est de

$$u_P(e) = E(u(q|e) - w_e)\pi_e\bar{q} + (1 - \pi_e)\underline{q} - w_e$$

Si, par exemple, $u_P(H) > \max(u_P(B), 0)$, le principal demandera à l'agent de faire l'effort H en échange du salaire $w_H = u^{-1}(u_r + d_H)$. En posant $\Delta\pi = \pi_H - \pi_B$, $\Delta q = \bar{q} - \underline{q}$ et $\Delta w = w_H - w_B$, la condition $u_P(H) \geq u_P(B)$ peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta\pi\Delta q \geq \Delta w$$

Ceci signifie que l'augmentation de la production obtenue quand l'agent fait un effort élevé suffit à compenser l'augmentation de la désutilité subie par l'agent.

Remarque 1 : quel que soit l'effort que le princpal choisira d'induire (faible, élevé, ou aucun) ; l'agent obtient toujours son utilité de réserve. Ceci est dû au fait que nous avons donné tout le pouvoir de négociation au principal.

Remarque 2 : pour induire un effort faible, il est inutile de menacer l'agent d'une amende s'il fait un effort élevé ! Il suffit de lui donner un salaire fixe w_B quel que soit son effort.

5.5 Cas intéressant : effort non observable

La différence avec le cas précédent est que le principal ne peut plus faire dépendre la rémunération de l'agent de l'effort fourni, mais seulement de la réussite ou non du projet.[12] Si le principal souhaite que l'agent fasse un effort élevé, il va falloir l'inciter à le faire en lui donnant une rémunération plus élevée lorsque le projet réussit que lorsque le projet échoue. Puisque, quel que soit son effort, l'agent ne peut jamais être sûr que le projet va réussir, le contrat proposé par le principal lui fera courir un risque, qu'il faudra rémunérer. Du coup, le profit du principal sera moindre que dans le cas où le principal observe l'effort.

Faisons maintenant une analyse plus précise : nous avons vu que les seuls contrats possibles et raisonnables étaient ceux qui faisaient dépendre la rémunération de l'agent de la réussite du projet, et seulement de la réussite du projet. Un tel contrat est caractérisé par les rémunérations $\bar{w}$ et $\underline{w}$ perçues par l'agent en cas, respectivement, de succès et d'échec du projet. Le problème du principal est donc de déterminer les valeurs optimales de $\bar{w}$ et $\underline{w}$. Pour ce faire, il faut d'abord analyser les conditions sous lesquelles l'agent accepte le contrat et choisit l'effort élevé.

élections, etc.) mais cela serait stupide. En effet, cela lui ferait courir un risque inutile, qu'il faudrait rémunérer pour que l'agent accepte de participer.

[12]En théorie, le principal pourrait proposer un contrat qui fait dépendre la rémunération de l'agent de facteurs sur lesquels l'agent n'a aucune influence ; mais cela ferait courir à l'agent des risques qu'il faudrait rémunérer, sans que ces risques incitent l'agent à faire l'effort souhaité. Du fait de la neutralité au risque du principal, la seule raison de faire courir des risques à l'agent est de l'inciter à faire l'effort désiré. Il en irait autrement si le principal n'était pas neutre au risque.

5.5.1 Comportement de l'agent

Pour simplifier les notations, on pose $\bar{u} = u(\bar{w})$ et $\underline{u} = u(\underline{w})$. Si l'agent accepte le contrat et fournit un effort faible, il obtient :

$$u_A(B) = \pi_B \bar{u} + (1 - \pi_B)\underline{u} - d_B.$$

S'il accepte le contrat et fournit un effort élevé, il obtient :

$$u_A(H) = \pi_H \bar{u} + (1 - \pi_H)\underline{u} - d_H.$$

Enfin, s'il refuse le contrat, il obtient u_r.

L'agent choisira d'accepter le contrat et de faire l'effort élevé si cela lui lui donne une espérance d'utilité plus élevé que de faire l'effort faible :

$$u_A(H) \geq u_A(B) \qquad (CI)$$

et au moins son utilité de réserve

$$u_A(H) \geq u_r \qquad (CP)$$

La condition (CI) s'appele *contrainte d'incitation* et la condition (CP) *contrainte de participation*. En posant $\Delta\pi = \pi_H - \pi_B$, $\Delta u = \bar{u} - \underline{u}$ et $\Delta d = d_H - d_B$, la contrainte d'incitation peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta\pi \Delta u \geq \Delta d \qquad (CI)$$

Ceci signifie que l'utilité supplémentaire due au salaire, lorsque l'agent fait l'effort élevé plutôt que l'effort faible, fait plus que compenser la désutilité supplémentaire due à l'effort.

Si la contrainte d'incitation n'est pas satisfaite, l'agent choisira d'accepter le contrat et de faire l'effort faible si

$$u_A(B) \geq u_r \qquad (CP')$$

et refusera le contrat sinon.

5.5.2 Meilleur contrat induisant (la participation et) l'effort faible

Le meilleur contrat induisant l'effort faible est de proposer un salaire fixe

$$\bar{w} = \underline{w} = w_B$$

où $w_B = u^{-1}(u_r + d_B)$. En effet, ce contrat induit bien l'effort faible et la partication, et ce au coût minimum, puisque tout contrat induisant la participation doit donner à l'agent une espérance de salaire d'au moins w_B. Comme dans le cas de l'effort observable, le profit correspondant du principal est de

$$u_P(B) = \pi_B \bar{q} + (1 - \pi_B)\underline{q} - w_B$$

5.5.3 Meilleur contrat induisant (la participation et) l'effort élevé

Si l'agent choisit un effort élevé, le profit du principal est de $\pi_H(\bar{q} - \bar{w}) + (1 - \pi_H)(\underline{q} - \underline{w}) = \left[\pi_H\bar{q} + (1 - \pi_H)\underline{q}\right] - [(\pi_H\bar{w} + (1 - \pi_H)\underline{w}]$. Le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé est donc la solution du problème de maximisation du profit du principal :

$$\max_{(\underline{w},\bar{w})\in\mathbb{R}^2} \pi_H(\bar{q} - \bar{w}) + (1 - \pi_H)(\underline{q} - \underline{w})$$

sous les contraintes (CI) et (CP). De manière équivalente, c'est la solution du problème de minimisation du salaire moyen versé à l'agent :

$$\min_{(\underline{w},\bar{w})\in\mathbb{R}^2} \pi_H\bar{w} + (1 - \pi_H)\bar{w})$$

toujours sous les contraintes (CI) et (CP).

Un tel problème d'optimisation sous contrainte se résout normalement en utilisant un Lagrangien (voir la partie 2 du polycopié). Toutefois, le problème ci-dessus est suffisament simple pour qu'on puisse le résoudre directement, et cela permet de mieux faire ressortir les intuitions économiques. Par contrat optimal on entend ci-dessous : le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé.

Propriété 1 : *dans tout contrat optimal, la contrainte de participation est saturée.*

En effet, supposons que dans un contrat optimal, la contrainte de participation soit satisfaite strictement. En diminuant légèrement $\underline{w}$, on obtient un nouveau contrat qui continue de respecter la contrainte de participation, et qui satisfait aussi (CI), car on a augmenté Δu sans modifier $\Delta\pi$ ni Δd. Ce nouveau contrat induirait donc la participation et l'effort élevé et à un coût moindre que le contrat initial puisque $\underline{w}$ a diminué. Ceci contredit l'optimalité du contrat initial.

Propriété 2 : *dans tout contrat optimal, la contrainte d'incitation est saturée.*

Idée de la preuve : supposons que dans un contrat optimal, la contrainte d'incitation soit satisfaire strictement. Il existerait alors un contrat avec le même salaire moyen mais un écart $\bar{w} - \underline{w}$ plus faible, et qui vérifierait toujours la contrainte d'incitation. Comme ce nouveau contrat donnerait le même salaire moyen à l'agent, mais en lui faisant courir moins de risque, il satisferait strictement la contrainte de participation. De plus, comme il induit la participation et l'effort élevé au même coût que le contrat optimal initial, le nouveau contrat est aussi optimal. Ceci contredit le fait que dans tout contrat optimal la contrainte de participation est saturée.

Preuve détaillée : supposons par l'absurde que, dans un contrat optimal $(\underline{w}^*, \bar{w}^*)$, (CI) soit satisfaite strictement. Considérons le contrat

$$(\underline{w}^* + \epsilon\pi_H, \bar{w}^* - \epsilon(1 - \pi_H)).$$

Pour $\epsilon > 0$ suffisament petit, par continuité, (CI) est toujours vérifiée. Fixons un tel ϵ, tel que de plus $\underline{w}' < \bar{w}'$ où $\underline{w}' = \underline{w}^* + \epsilon\pi_H$ et $\bar{w}' = \bar{w}^* - \epsilon(1 - \pi_B)$. Le contrat $(\underline{w}', \bar{w}')$ donne le même salaire moyen à l'agent que le contrat initial (vérifiez-le !). Pour appliquer le raisonnement du paragraphe "idée de la preuve", il suffit donc de montrer que ce contrat satisfait strictement (CP). Ceci est vrai dès que u est strictement concave, mais nous nous limitons ci-dessous au cas où u est dérivable.

Soit K la différence entre le membre de gauche de (CP) pour le nouveau contrat et le contrat optimal initial. Puisque le contrat initial satisfait (CP), il suffit de montrer que K est strictement positif. Or on a

$$K = \pi_H \left[u(\bar{w}') - u(\bar{w}^*)\right] + (1-\pi_H)\left[u(\underline{w}') - u(\underline{w}^*)\right]$$

Puisque u est dérivable, il existe w_g dans $]\bar{w}', \bar{w}^*[$ tel que $u(\bar{w}') - u(\bar{w}^*) = (\bar{w}' - \bar{w}^*)u'(w_g)$. De même, il existe w_p dans $]\underline{w}^*, \underline{w}'[$ tel que $u(\underline{w}') - u(\underline{w}^*) = (\underline{w}' - \underline{w}^*)u'(w_p)$. Donc

$$K = \pi_H(\bar{w}' - \bar{w}^*)u'(w_g) + (1-\pi_H)(\underline{w}' - \underline{w}^*)u'(w_p)$$

avec $w_p < \underline{w}' < \bar{w}' < w_g$. En utilisant $\underline{w}' = \underline{w}^* + \epsilon\pi_H$ et $\bar{w}' = \bar{w}^* - \epsilon(1-\pi_H)$, il vient :

$$K = \epsilon\pi_H(1-\pi_H)(u'(w_p) - u'(w_g))$$

Comme u est strictement concave, sa dérivée est strictement décroissante. Comme $w_p < w_g$, $\epsilon > 0$ et $0 < \pi_H < 1$, on a bien $K > 0$. Ceci termine la preuve.

Les propriétés 1 et 2 impliquent que si $(\underline{w}^*, \bar{w}^*)$ est un contrat optimal, il est solution du système :

$$\begin{cases} \Delta\pi(u(\bar{w}) - u(\underline{w})) & = & \Delta d & (CI) \\ \pi_H u(\bar{w}) + (1-\pi_H)u(\underline{w}) & = & u_r + d_H & (CP) \end{cases}$$

Ce système ayant une seule solution, le contrat optimal est unique. Il est donné par

$$\begin{cases} \underline{u}^* := u(\underline{w}^*) & = & u_r + d_H - \pi_H \frac{\Delta d}{\Delta\pi} \\ \bar{u}^* := u(\bar{w}^*) & = & u_r + d_H + (1-\pi_H)\frac{\Delta d}{\Delta\pi} \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \underline{w}^* & = & u^{-1}h\left(u_r + d_H - \pi_H\frac{\Delta d}{\Delta\pi}\right) & < & u^{-1}(u_r + d_H) \\ \bar{w}^* & = & u^{-1}\left(u_r + d_H + (1-\pi_H)\frac{\Delta d}{\Delta\pi}\right) & > & u^{-1}(u_r + d_H) \end{cases}$$

Comparaison avec le cas de l'effort observable

Pour mémoire, $u^{-1}(u_r+d_H)$ est le salaire fixe donné à l'agent dans le cas où l'effort est observable. Dans le cas effort inobservable, le salaire en cas de réussite du projet est donc plus élevé que dans le cas observable, et le salaire en cas d'échec plus faible.

En moyenne le salaire espéré est strictement plus élevé quand l'effort n'est pas observable que quand il l'est. En effet, puisque la contrainte de participation est saturée, c'est que l'agent obtient son utilité de réserve. Comme il fait face à un risque, et qu'il a une aversion stricte pour le risque, ceci implique que son salaire espéré est strictement plus élevé que le salaire fixe qui lui donnerait son utilité de réserve, c'est à dire que le salaire qu'il obtient lorsque l'effort est observable.[13]

[13] Les arguments précédents sont entièrement rigoureux, mais on peut aussi vérifier par le calcul que le salaire espéré de l'agent est plus élevé lorsque l'effort n'est pas observable : la contrainte de participation étant saturée, on a $\pi_H u(\bar{w}^*) + (1-\pi_H)u(\underline{w}^*) = u_r + d_H$. Comme u est strictement concave, ceci implique $u(\pi_H\bar{w}^* + (1-\pi_H)\underline{w}^*) > u_r + d_H$. Comme la fonction u est strictement croissante, la fonction u^{-1} l'est aussi, si bien qu'en composant par u^{-1} on obtient $\pi_H\bar{w}^* + (1-\pi_H)\underline{w}^* > u^{-1}(u_r + d_H) = w_H$. Or w_H est le salaire fixe reçu par l'agent lorsque l'effort est observable.

Le principal devant payer à l'agent une prime de risque pour induire l'effort élevé, il se peut qu'il décide de ne pas le faire si l'effort n'est pas observable, alors qu'il l'aurait fait s'il avait pu observer l'effort ; il se peut également, dans le cas où induire l'effort faible n'est pas profitable, que le principal ne puisse pas proposer à l'agent un contrat acceptable : aucun échange ne se fait alors, alors qu'un échange aurait été possible si l'on avait pu contracter sur l'effort. C'est un exemple d'inefficacité engendrée par une asymétrie d'information.

Supposons que dans le cas où l'effort est observable, le principal souhaite induire l'effort élevé. Le contrat optimal en effort inobservable donne alors la même utilité à l'agent que lorsque l'effort est observable (son utilité de réserve), mais une utilité moindre au principal. On parle d'optimum de second rang, par opposition à l'optimum de premier rang obtenu lorsque l'effort est observable.

5.5.4 Pour bien comprendre

Vérifier et commenter les points suivants (on compare le cas de l'effort observable au cas de l'effort inobservable, pour les mêmes utilités, probabilités de réussite du projet, etc.) :

a) si le projet n'est pas profitable quand l'effort est observable, alors il n'est pas profitable quand l'effort n'est pas observable.

b) il se peut que le projet soit profitable quand l'effort est observable, mais qu'il ne le soit pas quand l'effort n'est pas observable

c) si le principal décide d'induire l'effort élevé quand l'effort n'est pas observable, alors quand l'effort est observable, il décide également d'induire l'effort élevé.

d) il se peut que le principal décide d'induire l'effort élevé si l'effort est observable, mais pas si l'effort n'est pas observable

e) si le principal décide d'induire l'effort faible lorsque l'effort est observable, alors il décide également d'induire l'effort faible lorsque l'effort n'est pas observable, et obtient le même profit

f) que l'effort soit observable ou non, l'agent obtient la même espérance d'utilité (pas forcément le même salaire moyen, mais la même espérance d'utilité) : son utilité de réserve.

6 Situation de référence 2 : effort inobservable mais agent neutre au risque

Attention : dans cette section, on entend par "contrat optimal" le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé, mais il ne faut jamais oublier qu'il se peut que le principal prêfère induire l'effort faible ou ne puisse pas proposer de contrat acceptable par l'agent.

Puisque l'agent est neutre au risque, on peut supposer que $u(w) = w$. Le meilleur contrat induisant l'effort élevé est celui qui minimise le salaire versé à l'agent :

$$\pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\bar{w}$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{ll} (CI) & \Delta\pi(\bar{w} - \underline{w}) \geq \Delta d \\ (CP) & \pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\underline{w} - d_H \geq u_r \end{array}$$

D'après (CP), le salaire moyen versé à l'agent doit être d'au moins $d_H + u_r$. Il est ici possible d'inciter l'agent à faire l'effort élevé en lui versant exactement ce salaire moyen : il suffit de choisir $\bar{w} - \underline{w}$ suffisamment grand, plus grand que $\Delta d/\Delta\pi$. Cela fait courir un risque important à l'agent, mais ce n'est pas un problème puisque l'agent au neutre au risque. On en déduit que n'importe quel contrat $(\underline{w}, \bar{w})$ tel que :

$$\begin{cases} \pi_H \bar{w} + (1-\pi_H)\underline{w} = u_r + d_H \\ \bar{w} - \underline{w} \geq \frac{\Delta d}{\Delta \pi} \end{cases}$$

est optimal (au sens du meilleur contrat parmi ceux induisant la participation et l'effort élevé). Tout autre contrat soit ne respecterait pas la contrainte d'incitation, soit coûterait plus cher au principal : il n'y a donc pas d'autres contrats optimaux.

Remarques :

1) L'utilité du principal et celle de l'agent sont les mêmes que lorsque l'effort est observable : comme l'agent est neutre au risque, il n'y a plus de conflit entre incitation et aversion pour le risque de l'agent, et l'optimum de premier rang est restauré.

2) le lecteur vérifiera que la condition sous laquelle le principal préfère induire l'effort élevé que l'effort faible est la même que lorsque l'effort est observable, à savoir :

$$\Delta\pi\Delta q \geq \Delta w$$

3) Parmi les contrats optimaux, deux sont particulièrement intéressants. D'une part, celui qui sature la contrainte d'incitation, car c'est celui qu'on obtient comme cas limite du cas où l'agent a de l'aversion pour le risque. D'autre part, celui qui donne un profit fixe au principal, i.e. qui vérifie $\bar{q} - \bar{w} = \underline{q} - \underline{w}$. Ce contrat serait toujours optimal si le principal avait de l'aversion pour le risque. Il vérifie la contrainte d'incitation si et seulement si $\Delta\pi\Delta q \geq \Delta d$, c'est à dire si et seulement si le principal préfère induire l'effort élevé que l'effort faible.

Ce contrat s'interprète comme une franchise : le principal vend le projet à l'agent au prix correspondant à la rentabilité du projet si l'agent fait l'effort élevé et laisse ensuite l'agent choisir son effort comme il le souhaite. C'est l'agent qui assume tous les risques.