Université Paris-Dauphine — Cours de Y. Viossat
Master MIDO 1 — Polycopié de J.Renault

Théorie des jeux 2007/2008.

TD1

Stratégies dominantes

Exercice 1.

Une assemblée composée de 99 membres doit voter à la majorité pour choisir entre deux projets: a et b. Chaque membre $i \in \{1, ..., 99\}$ est doté d'une fonction d'utilité $u^i : \{a, b\} \mapsto \{0, 1\}$ supposée bijective. Pour voter, chacun écrit a ou b sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté.

1- Ecrire le jeu sous forme stratégique associé et montrer que voter pour le projet que l'on préfère est une stratégie dominante.

2- Il y a maintenant 3 votants et 3 projets a, b, c. On suppose $u^1(a) = u^2(b) = u^3(c) = 2$, $u^1(b) = u^2(c) = u^3(b) = 1$, $u^1(c) = u^2(a) = u^3(a) = 0$. Pour voter, chacun écrit a, b ou c sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté (si chaque projet reçoit un vote, aucun projet n'est realisé et l'utilité de chacun vaut 0). Y a t'il un équilibre en stratégies dominantes ?

Exercice 2. Enchères au second prix sous plis scellés

Un bien est mis aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels numérotés de 1 à n. La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé. Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien et paye un prix égal à la seconde plus haute offre (en cas de gagants ex-aequo, le joueur de plus petit numéro parmi les gagnants achète l'objet au prix le plus haut).

Chaque acheteur i a une valuation v^i dans $\mathbb{R}_+$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. S'il achète le bien au prix p, son utilité est $v^i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle.

Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir sa propre valuation est une stratégie dominante.

Equilibres de Nash

Exercice 3

Calculer les équilibres de Nash (<u>en stratégies pures</u>) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\
\begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,-1) \\ (2,2,2) & (-1,3,4) \end{pmatrix} \\
 & O
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} G & D \end{array} \\
\begin{pmatrix} (8,4,2) & (7,7,-2) \\ (9,2,5) & (-10,1,0) \end{pmatrix} \\
E
\end{array}
$$

Exercice 4

Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-1,0,-1) & (1,1,1) \\ (2,0,3) & (5,-1,4) \end{pmatrix} \\ O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,4,-1) & (1,2,3) \\ (-8,0,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 5. Duopole de Cournot

Deux entreprises produisent le même bien à un coût de production marginal constant égal à $c \in]0,1[$. Si le prix du bien est p, la demande est $D(p) = 1 - p$.

Simultanément chaque entreprise $i \in \{1,2\}$ choisit la quantité $q^i \geq 0$ qu'elle produit. Le "marché" égalise l'offre et la demande et le prix s'établit alors à $p = 1 - (q^1 + q^2)$. Chaque entreprise i vend alors la quantité q^i de bien au prix p. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit.

Ecrire le jeu sous forme stratégique associé. Montrer qu'il existe un unique équilibre de Nash.

Exercice 6. Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$, où $N = \{1,2\}$, $A^1 = A^2 = [0,1]$, et (x représente la stratégie du joueur 1, y celle du joueur 2):

a) $g^1(x,y) = 5xy - x - y + 2$; $g^2(x,y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.

b) $g^1(x,y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$; $g^2(x,y) = (x + y - 1)^2$.

c) $g^1(x,y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$; $g^2(x,y) = (x - y)^2$.

Exercice 7.

Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^n x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

1- Ecrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(x_1, ..., x_n)$.

2- Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.

3- Etudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

Exercice 8.

Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu à deux joueurs symétrique, c'est-à-dire tel que: $N = \{1,2\}$, $A^1 = A^2$ noté X, et $\forall (x^1, x^2) \in X \times X$, $g^1(x^1, x^2) = g^2(x^2, x^1)$.

On suppose que X est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, que g^1 est continue et que pour tout x^2 dans X, l'application qui à x^1 associe $g^1(x^1, x^2)$ est quasiconcave.

Montrer qu'il existe un équilibre symétrique, i.e. qu'il existe un élément x^* de X tel que (x^*, x^*) soit un équilibre de Nash de G. (On pourra poser $D = \{(x^1, x^2) \in X \times X, x^1 = x^2\}$ et appliquer le théorème de Kakutani à une correspondance bien choisie de D dans D).

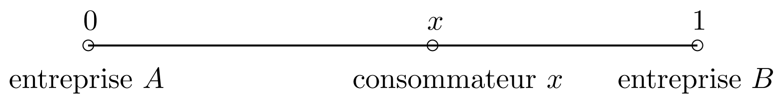
Exercice 9:

Deux entreprises A et B, situées dans une même ville, produisent le même bien. Le coût unitaire de production de chaque entreprise vaut 1/2. Chaque entreprise doit fixer un prix de vente unitaire, p_A pour l'entreprise A et p_B pour l'entreprise B.

La ville est composée d'un continu de consommateurs. Chaque consommateur achète une unité du bien à une et une seule des deux entreprises.

L'ensemble des consommateurs est situé uniformément dans la ville, qui est linéaire et représentée par le segment [0,1].

Ville



L'entreprise A se situe à l'extremité ouest (point d'abscisse 0) de la ville, l'entreprise B se situe à l'extremité est (point d'abscisse 1) de la ville.

Chaque consommateur subit un coût de transport linéaire: se déplacer d'une distance y coûte $y/2$. Ainsi, si un consommateur habitant au point $x \in [0,1]$ achète à l'entreprise A, il perçoit un coût de $p_A + x/2$, et s'il achète à l'entreprise B, il perçoit un coût de $p_B + \frac{1-x}{2}$. Chaque consommateur achète son bien en choisissant l'entreprise dont le prix perçu est le plus bas.

On étudie le jeu où chaque entreprise choisit son prix de vente dans $[1/2, +\infty[$, et vend aux consommateurs qui se présentent chez elle. Pour simplifier, on considère que le nombre d'habitant de la ville est 1 (l'unité pouvant être par exemple le million), et donc si 3/4 de la population achète à l'entreprise A, son profit est $3/4(p_A - 1/2)$ (celui de l'entreprise B sera alors de $1/4(p_B - 1/2)$ car 1/4 de la population achète à B). Chaque entreprise veut maximiser son profit. On note g_A la fonction de paiement de l'entreprise A, et g_B celle de l'entreprise B.

A) Calcul des fonctions de paiements

Soient p_A et p_B dans $[1/2, +\infty[$ les prix fixés par les entreprises.

A1. Soit un consommateur situé en $x \in [0,1]$. Montrer que si $x > 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme B. Montrer que si $x < 1/2 + p_B - p_A$, le consommateur achète à la firme A.

A2. Montrer que si $p_B - p_A > 1/2$, on a $g_A(p_A, p_B) = p_A - 1/2$ et $g_B(p_A, p_B) = 0$. Calculer $g_A(p_A, p_B)$ et $g_B(p_A, p_B)$ dans le cas où $p_A - p_B > 1/2$.

A3. On suppose $p_B - p_A \in [-1/2, +1/2]$. Montrer que:

$$g_A(p_A, p_B) = (1/2 + p_B - p_A)(p_A - 1/2) \text{ et } g_B(p_A, p_B) = (1/2 + p_A - p_B)(p_B - 1/2).$$

B) Calcul des meilleures réponses

Fixons le prix p_B de l'entreprise B. Montrer que la meilleure réponse de l'entreprise A est de fixer un prix p_A tel que (on pourra faire 3 cas, selon que $p_B \in [1/2, 1]$, $p_B \in [1, 2]$ ou $p_B \geq 2$):

$$p_A = \frac{1+p_B}{2} \text{ si } p_B \leq 2,\ p_A = p_B - 1/2 \text{ si } p_B \geq 2.$$

Enoncer la meilleure réponse de l'entreprise B au prix de l'entreprise A (par symétrie, il est inutile de refaire les calculs).

C) Calculer le ou les équilibres de Nash du jeu, et les paiements associés.

TD2

Stratégies Mixtes

Exercice 1. Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (6,6) & (2,7) \\ (7,2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (5,4) & (3,3) \\ (3,3) & (7,8) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) \\ (-3,3) & (4,-4) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,0) & (2,1) \\ (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} g & m & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (8,0) \\ (0,0) & (4,4) & (0,0) \\ (0,8) & (0,0) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1,-1) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (1,1,-1) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

Exercice 2. Valeurs de jeux matriciels

Calculer les valeurs des jeux à somme nulle représentés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(où a, b, c et d sont 4 paramètres réels).

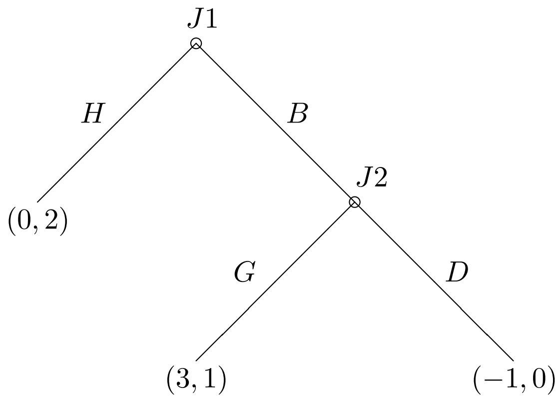
Même question pour la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

TD3: Jeux à information parfaite

Exercice 1.

Soit G le jeu sous forme extensive suivant:



A) Mettre le jeu sous forme normale.

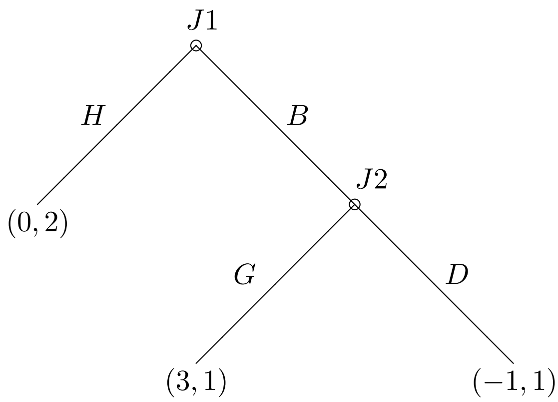
B) Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures de G.

C) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes de G. Quel est l'ensemble des paiements de ces équilibres ?

D) Calculer les équilibres sous-jeux parfaits de G.

Exercice 2

Soit G le jeu sous forme extensive suivant:



A) Mettre le jeu sous forme normale.

B) Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures de G.

C) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes de G. Quel est l'ensemble des paiements de ces équilibres ?

D) Calculer les équilibres sous-jeux parfaits de G.

Exercice 3.

Pour n, m deux entiers strictement positifs, on définit le jeu à deux joueurs $G(n, m)$ suivant. Soit $P(n, m)$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives ou nulles dont l'abcisse est inférieure ou égale à n et dont l'ordonnée est inférieure ou égale à m. Une pierre est placée sur chacun de ces points. Le joueur 1 joue en premier. Il choisit une pierre et enlève toutes les pierres dont les deux coordonnées sont supérieures ou égales à celles de la pierre choisie. C'est ensuite au joueur 2 de jouer selon la même règle. Le jeu se poursuit en alternant les joueurs. Celui qui prend la dernière pierre a perdu. On définit de même le jeu $G(\infty, \infty)$ en prenant tous les points à coordonnées entières positives ou nulles.

1- Montrer que dans le jeu $G(n, m)$, le joueur 1 a une stratégie gagnante (on ne demande pas de la trouver).

2- Trouver une stratégie gagnante pour $G(n, n)$.

3- Que pensez vous de $G(\infty, \infty)$?

Exercice 4. Jeu de Nim

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs dont les règles sont les suivantes. On dispose d'un ensemble de n jetons (avc $n \in \mathbb{N}^*$). Le premier joueur partitionne cet ensemble en deux sous ensembles non-vides. Le second joueur choisit un de ces deux sous ensembles et le partionne à son tour. Le premier en choisit un, le partitionne etc ... Le jeu se termine dès qu'un joueur choisit un singleton et ce joueur est alors déclaré gagnant. Formellement:

Le jeu G_n^i est le jeu de Nim ou le joueur i joue en premier. G_1^i : le joueur i gagne (et $j \neq i$ perd).

G_n^i $(n > 1)$: - le joueur i choisit $n_i \in \{1, \dots, n-1\}$

- le joueur j choisit $n_j \in \{n_i, n - n_i\}$

- on joue le jeu $G_{n_j}^j$.

1- Expliciter les jeux G_2^1, G_3^1, G_4^1.

2- Soit N^α (resp. N^β) l'ensemble des entiers n pour lesquels le joueur i (resp. j) a une stratégie gagnante dans G_n^i.

Montrer que $1 \in N^\alpha$ et que pour $n \geq 2$

$n \in N^\alpha \iff \exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\beta$ et $n - n_1 \in N^\beta$

$n \in N^\beta \iff \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\alpha$ ou $n - n_1 \in N^\alpha$

Montrer ensuite par récurrence que N^α est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p - 1, 5p, 5p + 1$ et que N^β est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p + 2, 5p + 3$.

Exercice 5. Sur un jeu de marchandage

On considère deux joueurs qui veulent se partager un gateau dont la taille est normalisée à 1.

Jeu statique. Le joueur 1 commence par proposer au joueur 2 un partage $(x, 1 - x)$ avec $x \in [0, 1]$ (il prend x pour lui). Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x, 1-x)$ et $(0, 0)$ sinon. Montrer que pour tout x, il existe un équilibre de Nash dans lequel le joueur 1 propose x et le joueur 2 accepte. Montrer qu'il y a un seul ESP et que le paiement est $(1, 0)$.

Jeu dynamique. Les joueurs peuvent maintenant alterner offres et contre-offres, en proposant l'un après l'autre. Pour les inciter à arriver "vite" à un accord, on suppose que la taille du gateau est multipliée par un facteur fixé $0 < \delta < 1$ à chaque étape. On considère Γ_T, le jeu à T étapes suivant.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1 - x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1 - x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1 - x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1-x_2))$, sinon on passe à l'étape 3.

Etape $t = 2k - 1$: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_t, 1 - x_t)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1}x_t, \delta^{t-1}(1 - x_t))$, sinon on passe à l'étape $t + 1$.

Etape $t = 2k$: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_t, 1 - x_t)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1}x_t, \delta^{t-1}(1 - x_t))$, sinon on passe à l'étape $t + 1$.

Si toutes les offres sont refusées, le paiement final est $(0, 0)$.

Le but est de résoudre Γ_T par récurrence amont et de trouver ses paiements d'ESP.

1- On considère le jeu $\Gamma_2(x, y)$, avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, définit comme suit.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1 - x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1 - x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1 - x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1 - x_2))$, sinon les paiements sont $(\delta^2 x, \delta^2 y)$.

Chercher les ESP de $\Gamma_2(x, y)$ par récurrence amont. Vérifier en particulier que le paiement d'ESP est unique. On le notera par la suite $F(x, y)$.

2- Pour tout T, on note maintenant $U_T = (u_T, v_T)$ un paiement d'ESP de Γ_T. Montrer par récurrence amont que pour tout T, U_T est unique et vaut $F(U_{T-2})$. Calculer U_T pour tout T. Donner la limite quand T tend vers l'infini.

TD4

Exercice 1. Un Poker

2 joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1F par joueur pour commencer le jeu. Un jeu de 32 cartes est battu, et le joueur 1 tire 1 carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (alors le joueur 1 gagne le franc de mise initiale du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée: si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 F); si elle est noire , le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 F).

Mettre ce jeu sous forme extensive, puis sous forme normale. Quelle est la somme équitable que doit payer le joueur 1 au joueur 2 pour jouer un tour ? Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?

Exercice 2. Un exemple de transmission stratégique d'information

On considère une interaction à deux joueurs dans laquelle un état de la nature $k = 1, 2$ est choisi au hasard de manière équiprobable. Cet état est observé par le joueur 1 mais pas par le joueur 2. Le joueur 1 doit alors envoyer un message $m \in \{A, B\}$ au joueur 2. Le joueur 2 devra choisir une action $s \in \{G, M, D\}$. Le paiement de chaque joueur dépend uniquement de k et s. Les couples de paiements sont les suivants. Etat $k = 1$: $G \to$ (0,6); $M \to$ (2,5); $D \to$ (0,0). Etat $k = 2$: $G \to$ (0,0); $M \to$ (2,5); $D \to$ (2,12).
1- Ecrire la forme extensive de ce jeu en précisant les espaces de stratégies. 2- Determiner les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu. On distinguera notamment suivant le nombre (1 ou 2) de messages différents envoyés par le joueur 1. Calculer les paiements d'équilibres pour chaque joueur. Quel est l'équilibre le plus favorable au joueur 1? 3- Montrer que le couple de stratégies suivant est un équilibre. Joueur 1 : jouer A si $k = 1$ et (A avec proba 1/2; B avec proba 1/2) si $k = 2$; Joueur 2 : jouer M si A et D si B. Calculer le paiement de cet équilibre. Le joueur 1 a t-il intéret à réveler son information (complètement, pas du tout, partiellement)?

Exercice 3. Un exemple où "la valeur de l'information est négative"

A) Considérons le jeu à deux joueurs suivant. La nature (ou un médiateur) tire une pièce à Pile ou Face de façon équiprobable. Aucun des joueurs n'observe le résultat du tirage. Le joueur 1 doit annoncer soit Pile, soit Face. Le joueur 2 entend l'annonce du joueur 1 puis annonce à son tour soit Pile, soit Face. Les joueurs observent finalement le résultat du tirage de la nature. Un joueur qui a annoncé un mauvais résultat (annonce de Pile alors que c'est Face, ou vice-versa) a un paiement de 0. Un joueur qui a annoncé le bon résultat reçoit un paiement de 2 si son adversaire a également annoncé le bon résultat, et de 6 sinon.

Mettre ce jeu sous forme extensive, puis sous forme normale. Quel est l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash ?

B) On modifie la règle du jeu de la façon suivante: la pièce est montrée au joueur 1 (mais pas au joueur 2) avant qu'il annonce.

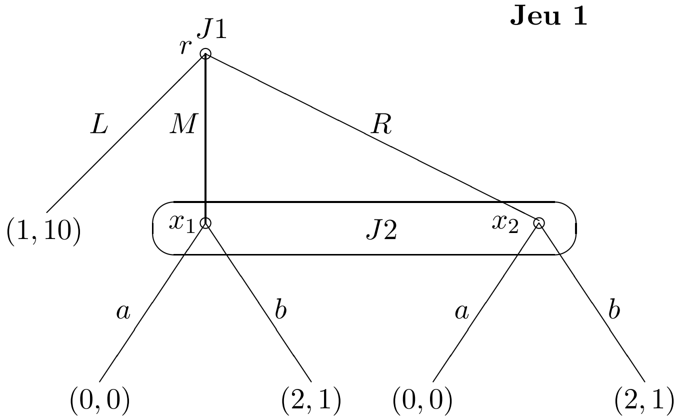
Mêmes questions qu'en A. Interprétation ?

TD5

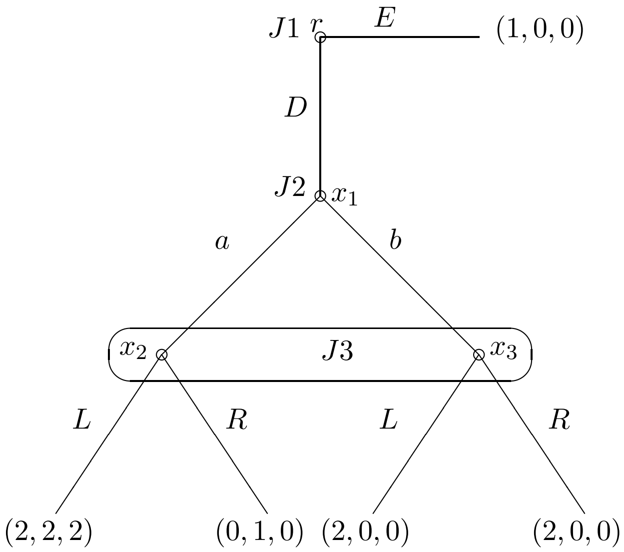
Exercice 1

Calculer les équilibres de Nash, équilibres sous-jeux parfaits et bayésiens parfaits des jeux sous forme extensive suivants:

Jeu 1



Jeu 2



Exercice 2: Enchères au premier prix sous plis scellés

Un bien est mis aux enchères. Il y a 2 acheteurs potentiels. La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur propose un prix pour le bien en soumettant une offre écrite sous pli scellé. Les deux plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien (en cas de propositions identiques, on tire aléatoirement de façon équiprobable celui qui achète l'objet) et paye le prix qu'il a proposé .

Chaque acheteur $i \in \{1, 2\}$ a une valuation v^i dans $[0, 1]$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. Si l'acheteur i achète le bien au prix p, son utilité est $v^i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle. Chaque acheteur connait sa valuation, et a une croyance uniforme sur $[0, 1]$ concernant la valuation de l'autre acheteur.

1. Modéliser cette situation par un jeu Bayésien.
2. Montrer qu'il existe un unique équilibre en stratégies pures (σ^1, σ^2) qui soit symmétrique $(\sigma^1 = \sigma^2 = f)$, avec f strictement croissante et dérivable.

Exercice 3. Double enchère.

Un vendeur (joueur 1) et un acheteur (joueur 2) négocient la vente d'un bien indivisible. Le cout pour le vendeur et c et la valeur pour l'acheteur est v. c et v sont indépendants, tirés selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Le vendeur et l'acheteur soumettent simultanément des offres b_1 et b_2. Si $b_1 > b_2$, l'échange n'a pas lieu. Sinon, l'échange a lieu et le prix est fixé à $(b_1 + b_2)/2$.

1- Calculer les paiements des deux joueurs.

2- On suppose que l'information est complète (i.e. v et c connus des deux joueurs) et que $v > c$. Montrer qu'il existe un continuum d'équilibres en stratégies pures.

3- On se place en information incomplète (chacun connaît alors unqiuement sa valuation c ou v) et on cherche un équilibre en stratégies pures $s_1(.), s_2(.)$. Montrer que $s_1(.), s_2(.)$ sont nécessairement croissantes.

4- En supposant les $s_i(.)$ strictement croissantes et C^1, donner le couple d'équations différentielles caractérisant les équilibres. Chercher un couple de solutions affines. A quelle condition y a t-il échange?

Université Paris-Dauphine **MD4**
J Renault **Décembre 2004**

Théorie des Jeux et Applications
2 heures, cours autorisé

Exercice I:

On considère un groupe de n étudiants préparant un concours (n est un entier strictement positif fixé). Chaque étudiant i dans $\{1, ..., n\}$ doit choisir un nombre d'heures $h_i \in \mathbb{R}_+$ qu'il consacre à préparer le concours. Ces choix sont supposés simultanés.

La désutilité de l'étudiant i dûe à son effort est alors $\frac{1}{2}{h_i}^2$. Le bénéfice, qu'il retire de son résultat comparé aux autres, est $h_i - \bar{h}$, où $\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j$. En bref, l'utilité de l'étudiant i est donc donnée par: $h_i - \bar{h} - \frac{1}{2}{h_i}^2$.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique.

2) Montrer que chaque joueur a une stratégie dominante.

3) Déterminer le ou les équilibres de Nash du jeu (on ne considèrera que des stratégies pures), et les paiements d'équilibres associés.

Exercice II:

Dans chacun des deux jeux suivants, déterminer:

1) les équilibres de Nash en stratégies pures,
2) les équilibres Bayésiens parfaits qui sont des stratégies pures, et
3) les équilibres sous-jeux parfaits qui sont des stratégies pures.

II-A)

II-B)

Exercice III:

1) Soit le jeu Γ à deux joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2):

	G	D
H	3,1	0,0
B	0,0	1,3

1.a) Donner, sans justification, les équilibres de Nash en stratégies pures de Γ.

1.b) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies (pures ou) mixtes de Γ, et calculer les paiements induits par ces équilibres.

2) On suppose qu'avant de jouer Γ, un médiateur exogène (ou la nature) tire à Pile ou Face avec probabilité (1/2,1/2), et annonce de façon publique le résultat aux joueurs. On a ainsi défini un nouveau jeu Γ' . Montrer que Γ' possède un équilibre de paiement $(2,2)$.

3) On revient au jeu Γ de la première question. On suppose que Γ est joué deux fois, et qu'après la première étape les actions effectivement jouées par les joueurs sont publiquement annoncées. On suppose aussi que les paiements des joueurs sont donnés par les paiements de l'étape 2 uniquement. On a ainsi défini un nouveau jeu Γ".

En considérant des stratégies telles que les deux joueurs jouent leurs actions avec probabilités égales à la première étape, montrer que $(2,2)$ est paiement d'équilibre de Γ".

Université Paris-Dauphine **MD4**
J Renault **Décembre 2003**

Théorie des Jeux et Applications

2 heures, cours et exercices autorisés, livres interdits

Exercice: Soit Γ le jeu sous forme extensive à trois joueurs suivant (la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la troisième celui du joueur 3).

1) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures de Γ.

2) Déterminer les équilibres Bayésiens parfaits en stratégies pures de Γ.

Problème:

A) Soit G le jeu à deux joueurs sous forme normale suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2):

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad L \quad & \quad R \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,3) & (0,3) \\ (3,3/4) & (-3/2,3/2) \\ (1,9/4) & (1/2,7/4) \\ (4,0) & (-1,1/4) \end{pmatrix} \end{array}$$

On notera g^1 (resp. g^2) la fonction de paiement du joueur 1 (resp. joueur 2).

A1) Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de G ? (on ne demande pas de justification)

A2) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes de G. Quel est l'ensemble des paiements de ces équilibres ?

B) Deux entreprises sont en concurrence. La firme 2, notée $F2$, est sur le marché depuis longtemps, alors que la firme 1 ($F1$) est une start-up qui peut eventuellement entrer sur le marché. La firme 1 peut soit posséder une innovation technologique majeure (la $F1$ est alors de type S), soit posséder une technologie classique copiée sur celle de $F2$ (la $F1$ est alors de type W). La firme 1 connaît son type, alors que la firme 2 pense que la firme 1 est de type S avec probabilité 1/4, et donc de type W avec probabilité 3/4.

Une et une seule entreprise va subsister sur le marché, après une eventuelle concurrence ou guerre des prix. Le paiement d'une entreprise finalement absente du marché est 0 s'il n'y a pas concurrence, et -2 s'il y a eu concurrence (perdue pour la firme en question). Le paiement de l'entreprise finalement en situation de monopole sera son profit de monopole (qui vaut 3 pour $F2$ et 4 pour $F1$), moins un coût eventuel de 2 qui n'intervient que s'il y a eu concurrence (gagnée par l'entreprise en question) entre les firmes.

La firme 1 doit d'abord choisir entre: - ne pas entrer sur le marché (action O_S si elle est de type S, O_W si elle est de type W), auquel cas le jeu est fini, il n'y a pas concurrence et $F2$ est en situation de monopole, - ou entrer sur le marché (action E_S ou E_W selon le type). Dans ce dernier cas, la firme 2 (qui ne connaît toujours pas le type de la firme 1) doit alors choisir entre: - se retirer du marché (action R), auquel cas le jeu est fini, il n'y a pas concurrence et $F1$ est en situation de monopole, - ou disputer le marché (action D): il y a alors concurrence et la firme qui reste finalement sur le marché est la firme 1 si son type est S, et c'est la firme 2 si $F1$ est de type W.

B1) Mettre ce jeu sous forme extensive.

B2) Mettre ce jeu sous forme normale, et calculer les paiements d'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

C) On modifie le jeu de la partie B, jusqu'à considérer le jeu sous forme extensive Γ' représenté page 3. On ne demande pas de mettre Γ' sous forme normale.

Soit $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ un équilibre de Nash (en stratégies de comportement) de Γ. On note z la probabilité que la firme 2 joue R_C en u: $z = \sigma^2_u(R_C)$.

C1) Montrer que σ^1 joue C_S avec probabilité 1 en $\{x_1\}$.

C2) Montrer que σ^1 joue E_W avec probabilité nulle en $\{x_2\}$ (on pourra raisonner par contradiction).

C3) Montrer qu'il existe λ dans $]0,1[$ tel que: $\sigma^1_{\{x_2\}}(C_W) = \lambda$, et $\sigma^1_{\{x_2\}}(O_W) = 1 - \lambda$.

C4) Déterminer z.

C5) Déterminer λ.

C6) Quels sont les équilibres de Nash de Γ' ?

Jeu sous forme extensive Γ'

Université Paris-Dauphine **MIDO1**
J Renault **9 Novembre 2005**

Partiel: Théorie des Jeux et Applications
2 heures, cours autorisé.

Exercice A: Pour chacun des jeux A.1) à A.5) suivants, on demande:

a) de donner, **sans justification**, les équilibres de Nash en stratégies pures,

et b) de déterminer, **en justifiant**, les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibres de Nash en stratégies mixtes.

A chaque fois, le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne, la 1ère composante du paiement donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2. (et dans A.5, le joueur 3 choisit la matrice, et la 3ème composante donne le paiement du joueur 3).

A.1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

A.2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (2,3) \\ (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

A.3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g & m & d \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (5,2) & (10,2) & (1,3) \\ (2,8) & (10,7) & (5,2) \\ (3,2) & (20,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

A.4)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (5,0) & (1,1) \\ (2,0) & (5,1) \\ (3,1) & (4,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

A.5)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,0) \\ (1,0,0) & (0,0,1) \end{pmatrix} \\ & O \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,1) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ & E \end{array}$$

Exercice B: Un jeu de Marchandage.

On note: $T = \{(x, y) \in I\!R^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur un point de T, sachant que l'abscisse correspond au paiement du joueur 1, l'ordonnée correspond au paiement du joueur 2, et qu'en cas de désaccord le paiement de chaque joueur sera nul.

Plus précisément, on considère l'interaction suivante. Simultanément, le joueur 1 choisit un réel x et le joueur 2 choisit un réel y. x et y peuvent être n'importe quels réels. Si $(x, y) \in T$, alors le paiement du joueur 1 est x et celui du joueur 2 est y. Si $(x, y) \notin T$, alors le paiement de chaque joueur est nul. (Ces règles sont connues des deux joueurs.)

B.1) Modéliser ceci par un jeu sous forme stratégique $G = \left(N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N}\right)$.

B.2) Soit (x, y) dans T tels que $x+y = 1$. Montrer que (x, y) est un paiement d'équilibre de Nash de G.

B.3) Déterminer tous les paiements d'équilibres de Nash de G.

Exercice C: On définit le jeu à somme nulle suivant. Simultanément, le J1 choisit un entier naturel i et le J2 choisit un entier naturel j. Le J1 gagne 1 si les nombres choisis sont différents, et perd 1 si les nombres choisis sont égaux.

On considère donc le jeu à somme nulle $G = (I, J, g)$, où: $I = J = I\!N$, et g est l'application de $I \times J$ dans $I\!R$ telle que: $\forall (i,j) \in I \times J, g(i,j) = 1$ si $i \neq j$, et $g(i,j) = -1$ si $i = j$.

C.1) Calculer les quantités suivantes:

$$\alpha = \sup_{i \in I} \inf_{j \in J} g(i,j) \quad \text{et} \quad \beta = \inf_{j \in J} \sup_{i \in I} g(i,j).$$

Déterminer si G a une valeur, et l'ensemble (éventuellement vide) des stratégies optimales de chaque joueur.

C.2) On considère l'extension mixte de G, i.e. le jeu $\tilde{G} = (\Delta(I), \Delta(J), \tilde{g})$, avec:

$$\Delta(I) = \Delta(J) = \{x = (x_i)_{i \geq 0}, \forall i \;\; x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{+\infty} x_i = 1\}$$

(ensemble des probabilités sur $I\!N$.)

Pour (x, y) dans $\Delta(I) \times \Delta(J)$,

$$\tilde{g}(x,y) = I\!E_{x \otimes y}(g) = \sum_{(i,j) \in I\!N^2} x_i \, y_j \, g(i,j).$$

Déterminer si $\tilde{G}$ a une valeur, et l'ensemble (éventuellement vide) des stratégies optimales de chaque joueur.