Corrigé du partiel de théorie des jeux

Exercice 1 : par exemple, $G = \{N, (A_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N}\}$ le jeu défini par : $N = \{1, 2\}$; $A_1 = A_2 = \mathbb{N}$, $g_1(a_1, a_2) = a_1 - a_2$ et $g_2 = -g_1$.
Les ensembles de stratégies des joueurs sont infinis. De plus, soit $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. On a : $g_1(a_1+1, a_2) > g_1(a_1, a_2)$. Donc a_1 n'est pas meilleure réponse à a_2, donc (a_1, a_2) n'est pas un équilibre de Nash. Comme ceci est vrai pour tout $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, il n'y a pas d'équilibre de Nash.

Exercice 2 : a) La situation correspond au jeu suivant :

	A	D
A	$-2, -2$	$4, 0$
D	$0, 4$	$2, 2$

A : Attendre

D : Dégager

~~b) Si le joueur 1 joue A avec probabilité x et que le joueur 2 ... y, les paiements du joueur 1 est : $g_1(x, y) =$~~

b) Supposons que le joueur 2 joue A avec probabilité y. Le paiement du joueur 1 est de :
$$\begin{cases} -2y + 4(1-y) & \text{s'il joue A} \\ 2(1-y) & \text{s'il joue D.} \end{cases}$$

Or $-2y + 4(1-y) > 2(1-y) \iff 1 - y > y \iff y < 1/2$.

On en déduit le tableau de meilleures réponses suivant pour J1

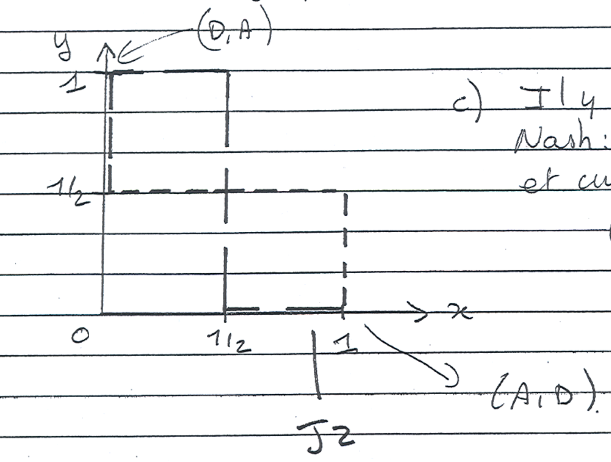
$y < 1/2$	$y = 1/2$	$y > 1/2$.
$x = 1$ (unique MR)	Pour tout $x \in [0, 1]$, $(x, 1-x)$ est MR.	$x = 0$ (unique MR).

(on note x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue A)

Le jeu étant symétrique, on a de même, pour J2 :

$x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$y = 1$	n'importe quel y	$y = 0$

On obtient le graphe suivant.



c) Il y a donc trois équilibres de Nash : 2 purs (A,D) et (D,A) et un mixte :

$$\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}D \, , \, \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}D\right).$$

Exercice 3 : a) une stratégie σ_i du joueur i est strictement dominée s'il existe une stratégie τ_i du joueur i telle que, pour toute ~~comportement~~ stratégie des autres joueurs, σ_i obtient un paiement strictement inférieur que τ_i.

Ici, A_1 est meilleure réponse à A_2, et B_1 est meilleure réponse à B_2. Or une stratégie strictement dominée n'est jamais meilleure réponse donc A_1 et B_1 ne sont pas strictement dominées. En revanche, pour $x \in]0, 1/3[$, la stratégie mixte $(1-x)A_1 + x B_1$ domine strictement C_1. Le jeu étant symétrique : A_2 et B_2 ne sont pas strictement dominées, mais C_2 est strictement dominée par $(1-y)A_2 + yB_2$ pour tout y dans $]0, 1/3[$

b) Un équilibre de Nash est un profil de stratégie $\sigma = (\sigma_i)_{i\in N}$ tel que pour tout i dans N, σ_i est meilleure réponse à σ_{-i}.

Le jeu a deux équilibres purs : (A_1, A_2) et (B_1, B_2).
Puisque $g_1(A_1, A_2) \neq g_1(A_1, B_2)$ il ne peut pas y avoir d'équilibres où ~~l'un des joueurs~~ le joueur 1 joue A_1 et le joueur 2 joue une stratégie non pure. En répétant cet argument, on montre qu'il n'y a pas d'équilibre où l'un des joueurs joue en pur et pas l'autre. Enfin si (x,y) est un EN complètement mixte, on a.

mêmes EN que le jeu $\begin{pmatrix} 4,4 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4y = (1-y) \\ 4x = (1-x) \end{cases}$$ donc $x = y = 1/5$.

Réciproquement, ~~…~~ $x=y=1/5$ définit bien un EN du jeu.
Il y a donc trois EN : (A_1, A_2), (B_1, B_2) et $\left(\frac{1}{5}A_1+\frac{4}{5}B_1, \frac{1}{5}A_2+\frac{4}{5}B_2\right)$

Exercice 4 :

a) La somme des utilités est :

$$S(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - \frac{x_i^2}{2}\right)$$
$$= n \times \ln\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Comme $S(x_1,\dots,x_n)$ est strictement concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, ~~un point où le gradient est nul est un maximum de S, s'il existe,~~ s'il existe un vecteur $x_n=(x_1,\dots,x_n)$ où le gradient de S est nul, alors x est l'unique maximum de S.

Or : $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0 \iff n \times \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j} - x_i = 0 \iff x_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$

Donc si $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a, pour tout $(i,k) \in \{1,\dots,n\}^2$:

$$x_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = x_k \text{ donc } \sum_{j=1}^{n} x_j = n x_i \text{ donc } x_i = \frac{n}{n x_i} = \frac{1}{x_i}$$

donc $x_i = 1$. Réciproquement si $x_i = 1$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. ~~Donc l'unicité~~

Conclusion : le vecteur $x°$ qui maximise S ~~est unique et~~ existe, est unique et vaut $x° = (1,1,\dots,1)$.

b) Le jeu est $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N}\}$

avec $N = \{1,\dots,n\}$, $A_i = \mathbb{R}_+^*$ et $g_i(x_1,\dots,x_n) = y - x_i^2/2$

où $y = \ln\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.

c) Soit $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ un EN. Comme ~~…~~ l'ensemble $A_i = \mathbb{R}_+^*$ est ouvert ~~…~~ et g_i différentiable on a :

$$\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Or $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0 \iff \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = x_i$

Donc x^* satisfait $x_i^* = x_k^* = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$ pour tout (i,k)

donc $x_i^* = \dfrac{1}{n x_i^*}$ donc $\boxed{x_i^* = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$. Réciproquement, si $x_i^* = 1/\sqrt{n}$ pour tout i, ~~on a~~ on a $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(x^*) = 0$ pour tout i, donc comme g_i est concave en x_i, x^* est un EN.

Il y a donc un EN unique : $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, 1/\sqrt{n}\right)$.

d) On a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$ (pour $n \geq 2$). L'effort d'équilibre est donc plus petit que l'effort socialement optimal. Ceci vient du fait que produire un effort élevé ~~…~~ a un effet positif sur le bien être des autres, et que cet effet n'est pas pris en compte dans le calcul des efforts d'équilibre.

Exercice 5 : a) Les fonctions de paiements ne sont pas continues aux points $p_1 = p_2$ (pour $p_i \neq v_i$).

b) Une stratégie est dite dominante si elle est meilleure réponse à toutes les stratégies des autres joueurs. L'acheteur 1 n'a pas de stratégie dominante. En effet, si l'acheteur 2 joue $p_2 < v_1$, les paiements du joueur 1 sont :

$$g_1(p_1, p_2) = \begin{cases} v_1 - p_1 \text{ si } p_1 > p_2 \\ \dfrac{v_1 - \cancel{p_2}}{2} = \dfrac{v_1 - p_2}{2} > 0 \text{ si } p_1 = p_2 \\ 0 \text{ si } p_1 < p_2. \end{cases}$$

On a donc $g_1(p_1,p_2) < v_1 - p_2$ pour tout p_1

mais $\sup_{p_1 \in \mathbb{R}} g_1(p_1,p_2) = v_1 - p_2$. Il n'y a donc pas de meilleure réponse à p_2, et donc pas de stratégie qui soit toujours meilleure réponse.

Autre preuve: soit $p_1 \in \mathbb{R}$.

- si $p_1 > v_1$: alors, pour $p_2 < v_1$, $g_1(p_1,p_2) < 0 = g_1(v_1,p_2)$

donc p_1 n'est pas tjs meilleure réponse.

- si $p_1 = v_1$: pour $p_2 < v_1$, $g_1(p_1,p_2) = 0 < g_1(\frac{v_1+p_2}{2}, p_2)$

donc p_1 n'est pas tjs meilleure réponse.

- si $p_1 < v_1$: pour $p_1 < p_2 < v_1$, $g_1(p_1,p_2) = 0 < g_1(\frac{v_1+p_2}{2}, p_2)$

donc

Donc il n'y a pas de stratégie qui soit tjs meilleure réponse.

c) Montrons que si $p_1^* > v_1$ alors la stratégie pure $p_1 = p_1^*$ est faiblement dominé par $p_1 = v_1$.

En effet: on a pour tout $p_2 \in \mathbb{R}$, $g_1(p_1^*, p_2) \leq 0 = g_1(v_1, p_2)$

et pour $p_2 < p_1^*$ on a $g_1(p_1^*, p_2) = v_1 - p_1 < 0 = g_1(v_1, p_2)$.

$p_1 = p_1^*$ est donc faiblement dominée par $p_1 = v_1$.

Π chose pour le joueur 2.

La stratégie p_1^* n'est pas strictement dominée car si $p_2 > p_1^*$ on a $g_1(p_1^*, p_2) = 0 = \max_{p_1} g_1(p_1,p_2)$.

d) Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_1 \neq p_2$. On peut supposer $p_1 > p_2$.
On a alors pour $p_1' \in]p_2, p_1[$

$$g_1(p_1, p_2) = v_1 - p_1 < v_1 - p_1' = g_1(p_1', p_2)$$

donc p_1 n'est pas MR à p_2, donc (p_1, p_2) n'est pas un équilibre.

e) Si (p_1, p_2) est un EN alors d'après d), on a $p_1 = p_2$.
Supposons donc $p_1 = p_2 = p$.
Si $p > v$, on a $g_1(p, p) = \frac{v-p}{2} < 0 = g_1(v, p)$. Donc (p, p) n'est pas un EN.
De même, si $p < v$ alors pour $\varepsilon \in]0, \frac{v-p}{2}[$, on a :

$$g_1(p+\varepsilon, p) = v - (p+\varepsilon) > v - \left(\frac{v+p}{2}\right) = \frac{v-p}{2} = g_1(p, p)$$

donc (p, p) n'est pas un EN.
Donc nécessairement, si (p_1, p_2) est un EN, $p_1 = p_2 = v$.
Réciproquement : si $p_2 = v$ alors

$$g_1(v, p_2) = 0 = \max_{p_1} g_1(p_1, p_2)$$ donc $p_1 = v$ est meilleure réponse à $p_2 = v$ et de même $p_2 = v$ est meilleure réponse à $p_1 = v$.
Donc (v, v) est un EN.

f) Supposons qu'il y ait un EN (p_1, p_2). Alors d'après d) on a $p_1 = p_2 = p$. De plus si $p > v_2$ alors
$g_2(p_1, p_2) = \frac{v_2 - p}{2} < 0 = g_2(p_1, v_2)$ donc p_2 n'est pas meilleure réponse à p_1 donc (p_1, p_2) n'est pas un EN. Contradiction. Donc $p \leq v_2$.
Mais alors $p < v_1$. Donc il existe $\varepsilon \in]0, \frac{v-p}{2}[$ et on a :
$g_1(p+\varepsilon, p_2) = g_1(p+\varepsilon, p) = \frac{v-(p+\varepsilon)}{2} > \frac{v-p}{2} = g_1(p, p) = g_1(p_1, p_2)$.
Donc p_1 n'est pas MR à p_2. Contradiction.

Donc il n'y a pas d'EN.