Université Paris Dauphine
Licence de mathématiques appliquées
Analyse complexe

TD 3. Fonctions analytiques

Exercice 1. Montrer que chacune des fonctions suivantes est définie et analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ que l'on déterminera :

$$a(z) = \frac{\sinh(z)}{1+z^2},\ b(z) = e^{\frac{1}{z}},\ c(z) = \tan(z),\ d(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$e(z) = \cos\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right),\ f(z) = \frac{\cosh(z)-1}{z^2},\ g(z) = \frac{\sin(z)}{(1+z)^2},\ h(z) = \frac{1}{e^z}.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais pas analytique.

Exercice 3. Soit f une fonction entière vérifiant $f(z) = f(z^2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ et f une fonction non identiquement nulle et analytique sur Ω vérifiant

$$f'(z) = (f(z))^2,\ z \in \Omega. \tag{1}$$

Montrer que f ne s'annule pas sur Ω puis résoudre (1).

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fontions analytiques sur $\mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1;\ g\left(\frac{1}{2n}\right) = g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n};\ h\left(\frac{1}{n}\right) = h\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2};\ p\left(\frac{i}{n}\right) = ip\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2. Déterminer l'ensemble $Z(f)$ des zéros de la fonction f.

3. Montrer que l'ensemble $Z(f)$ a un point d'accumulation. Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 7. Dessiner les images par l'exponentielle des droites passant par 0.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ par $f(z) = 1 - z^2$.

1.a. Montrer que la fonction f est analytique sur Ω et que $f(z) \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ pour tout $z \in \Omega$.

1.b. En déduire qu'il existe une fonction analytique g sur Ω telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in \Omega$.

1.c. En déduire qu'il existe une fonction analytique $\tilde{h}$ sur Ω telle que $f(z) = \tilde{h}(z)^2$ pour tout $z \in \Omega$.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions analytiques h sur Ω telle que $f(z) = h(z)^2$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 9. (Lemme de Schwarz)

1. Soit f une fonction analytique sur le disque ouvert unité D telle que $f(0) = 0$ et avec $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans D. Montrer que $|f(z)| \leq z$ sur D, que $|f'(0)| \leq 1$, et que toutes ces inégalités sont strictes (á part évidemment $f(0) \leq 0$) lorsque f n'est pas une homothétie.
2. Application 1 : trouver toutes les involutions analytiques de D dans D (les fonctions f telles que $f \circ f = Id$) telles que $f(0) = 0$.
3. Application 2 : Montrer que pour tout z dans $D\setminus\{0\}$ on a $|\sin(z)| \leq \sinh(1)|z|$.