Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Partiel du mars 2017
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre les problèmes suivants.

1. Premier problème :

$$\min_{(x,y)\in K} \big(2x^2+y^2\big), \text{ où } K := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : x+2y=3\big\}$$

a) Montrer que le problème admet une solution.
b) Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point dans K.
c) Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème (Théorème Kuhn-Tucker) et en déduire la solution du problème.

2. Les mêmes questions pour le deuxième problème :

$$\max_{(x,y,z)\in K} 3x+2y+z, \quad \text{où } K := \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z\geq 0\Big\}.$$

Exercice 2. Soient $b\in\mathbb{R}^k$, A une matrice de dimension $k\times n$ de rang k, où $k\leq n\in\mathbb{N}$. On définit

$$K \ := \ \{x\in\mathbb{R}^n \ : Ax=b\}$$

On cherche à calculer, pour un point $y\in\mathbb{R}^n$, sa projection $x^* := \Pi_K(y)$ dans K, qui est, par le cours, l'unique solution du problème :

$$\min_{x\in K} \|y-x\|^2.$$

1. Utiliser Théorème de Kuhn-Tucker, montrer qu'il existe un vecteur $\lambda\in\mathbb{R}^k$, t.q.

$$x^* + A^\top\lambda = y.$$

2. Utilisant le fait que $x^*\in K$, i.e. $Ax^*=b$, en déduire que

$$AA^\top\lambda = Ay-b.$$

3. En déduire ensuite que

$$x^* = \big(I_n - A^\top(AA^\top)^{-1}A\big)y + A^\top(AA^\top)^{-1}b,$$

où I_n est la matrice identique de dimension $n\times n$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1, on considère le problème

$$\min_{x\in K} f(x),$$

Donner un algorithme itérative pour approximer la solution optimale (sans justification de la convergence).

Exercice 3. Soient A_1, A_2 deux matrices de dimension $k_1\times n$ et $k_2\times n$, $b_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, on admet que

$$\inf\big\{f(x)\ : A_1x = b_1, A_2x \le b_2\big\} = \sup_{\lambda_1\in\mathbb{R}^{k_1},\lambda_2\in\mathbb{R}^{k_2}_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \big(f(x)+\lambda_1\cdot(A_1x-b_1)+\lambda_2\cdot(A_2x-b_2)\big).$$

On considère un problème de transport optimal suivant : Soit $E = \{0,1\}$, nous avons deux mesures de probabilité μ et ν fixées sur E, t.q. $(\mu(\{0\}), \mu(\{1\})) = (\mu_0, \mu_1) \in (0,1)^2$ et $(\nu(\{0\}), \nu(\{1\})) = (\nu_0, \nu_1) \in (0,1)^2$ avec $\mu_0+\mu_1 = 1$ et $\nu_0+\nu_1 = 1$. Soit $f : E\times E \to \mathbb{R}$ une fonction de coût, on considère tous les vecteurs aléatoires possibles (X_0, X_1) sur $E\times E$ t.q. $X_0 \sim \mu$ et $X_1 \sim \nu$ et cherche à résoudre le problème :

$$\min\big\{\mathbb{E}[f(X_0, X_1)]\ : X_0 \sim \mu, X_1 \sim \nu\big\}. \tag{1}$$

1. On sait que la loi jointe d'un vecteur aléatoire (X_0, X_1) sur $E \times E$ est complètement caractérisée par $(p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}) \in [0,1]^4$ avec $p_{ij} = \mathbb{P}[X_0 = i, X_1 = j]$, $i,j = 0,1$. Montrer que le problème (1) pourrait être reformulé :

$$P := \inf\big\{p(f)\ : p_{i0} + p_{i1} = \mu_i,\ p_{0j} + p_{1j} = \nu_j,\ p_{ij} \ge 0,\ \text{pour } i,j = 0,1\big\},$$

   où $p(f) := \sum_{i,j=0,1} f(i,j)p_{ij}$.
2. Soient $\phi, \psi : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur E, on introduit

$$d(\phi,\psi) := \mu(\phi) + \nu(\psi) + \inf_{p_{ij}\ge 0, i,j=0,1} \big(p(f) - \sum_{i,j=0,1} p_{ij}(\phi(i) + \psi(j))\big),$$

   où $\mu(\phi) := \mu_0\phi(0) + \mu_1\phi(1)$ et $\nu(\psi) := \nu_0\psi(0) + \nu_1\psi(1)$.
   Utilisant la dualité qu'on admet au début de l'énoncé, montrer que

$$P = D := \sup\big\{d(\phi,\psi)\ : \text{toutes les fonction } \phi,\psi : E \to \mathbb{R}\big\},$$

3. Montrer la dualité finale :

$$P = \sup\big\{\mu(\phi) + \nu(\psi)\ : \phi(i) + \psi(j) \le f(i,j), \forall i,j = 0,1\big\}.$$

   (Remarque : cette dualité est appelé dualité de Kantorovich, qui est vrai pour un espace E beaucoup plus général.)

Barême indicatif : Exercice 1 : 12 points, Exercice 2 : 6 points. Exercise 3 : 6 points.