Examen de septembre 2004

Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Le barème est donné à titre indicatif.

Problème : (14 pts)

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon de X ayant pour densité la fonction suivante

$$f_X(x;\theta) = \frac{(k+1)x^k}{\theta^{k+1}} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$$

où le paramètre $k > -1$ est connu et θ est un paramètre inconnu.

1. (1 pt) Montrer que la fonction f_X est une *densité de probabilité.*
2. (2 pts) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. (1 pt) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
4. (2 pts) Donner la densité de probabilité de $\hat{\theta}$.
5. (1 pt) Calculer $\mathbb{E}(\hat{\theta})$ et en déduire un estimateur $\tilde{\theta}$ sans biais de θ.
6. (1 pt) Peut on parler d'efficacité pour cette estimateur ? Peut on calculer l'information de Fischer apportée par X ?
7. (1 pt) Montrer que $\tilde{\theta}$ converge en moyenne quadratique vers θ.
8. (1 pt) Expliciter l'estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
9. (1 pt) Montrer que T_n est un estimateur sans biais.
10. (1 pt) Montrer que T_n converge en moyenne quadratique vers θ.
11. (2 pts) Comparer les deux estimateurs.

Exercice : (6 pts)

1. (3 pts) Un fabricant d'ampoules électriques annonce que la durée de fonctionnement moyenne de ses ampoules est de 170 h. Afin de vérifier cette affirmation, un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard 100 ampoules dans un lot de fabrication. À l'issue de l'expérimentation, l'organisme constate une moyenne empirique de durée de fonctionnement de 158 h ($\overline{x_{100}} = 158$), avec un écart type corrigé égal à 30h ($s_{99} = 30$). On admet que cette durée suit une loi normale.
   Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique asymptotique de niveau $1 - \alpha = 0.95$ et conclure sur la véracité de l'affirmation du fabriquant.
2. (3 pts) On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.