Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD3 - Statistique Inférentielle

Année 2003-2004

Examen Partiel
17/03/2004

Durée deux heures, Aucun document n'est autorisé, Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.

Exercice 1 (15 pts)

Partie A.. On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{U}]\theta, 2\theta[$, où $\theta > 0$, et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X. Soit $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ l'échantillon ordonné.

A.1 (2 pts) Calculer $\mathbb{E}(X_{(1)})$ et $\mathbb{E}(X_{(n)})$. Déterminer les constantes a et b telles que $\mathbb{E}(aX_{(1)}) = \theta$ et $\mathbb{E}(bX_{(n)}) = \theta$.

A.2 (2 pts) Montrer que $\mathbb{V}(bX_{(n)}) \leq \mathbb{V}(aX_{(1)})$.

A.3 (1 pt) Soit $T = cX_{(1)} + dX_{(n)}$, donner une condition sur les constantes c et d telle que $\mathbb{E}(T) = \theta$. On pose $c = c^* = (n+1)/(5n+4)$, en déduire la valeur d^* de d telle que $\mathbb{E}(T) = \theta$.

A.4 (2 pts) Calculer $\mathbb{V}(T)$. En déduire que $\mathbb{V}(c^*X_{(1)} + d^*X_{(n)})) \leq \mathbb{V}(bX_{(n)})$.

A.5 (1 pt) Montrer que $T^* = c^*X_{(1)} + d^*X_{(n)}$ converge en probabilité vers θ.

Partie B.. On considère maintenant, pour simplifier, une variable aléatoire X de loi $\mathcal{U}]0,1[$, et un $(2n-1)$-échantillon $X_1, \ldots, X_{2n-1}$ de X. Soit $X_{(1)}, \ldots, X_{(2n-1)}$ l'échantillon ordonné. On appelle $X_{(n)}$ la médiane empirique de l'échantillon $X_1, \ldots, X_{2n-1}$. On va montrer que $X_{(n)}$ tend vers $1/2$ et donner un TCL. Pour ce faire, on utilise le TCL de Lindeberg pour les tableaux triangulaires.

Soit $(Y_{n,i})_{n\geq 0, i\leq t(n)}$ une suite (triangulaire) de variables aléatoire indépendantes (à n fixé), si

$$\sum_{i=1}^{t(n)} (Y_{n,i} - \mathbb{E}(Y_{n,i}))^2 1_{|Y_{n,i} - \mathbb{E}(Y_{n,i})| > \epsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{t(n)} \mathbb{V}(Y_{n,i})}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

alors

$$Z_{t(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{t(n)} (Y_{n,i} - \mathbb{E}(Y_{n,i}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{t(n)} \mathbb{V}(Y_{n,i})}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

Posons $t \in R$.

B.1 (2 pts) Soit $Y_{n,i} = 1$ si $X_i < \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{8n}}$ et $Y_{n,i} = -1$ sinon, pour $i = 1, \ldots, 2n-1$. Donner la loi des $Y_{n,i}$ ainsi que leur espérance et variance. Montrer que les $Y_{n,i}$ sont indépendantes (à n fixé).

B.2 (1 pt) Montrer que pour n suffisamment grand, les évènements

$$|Y_{n,i} - \mathbb{E}(Y_{n,i})| > \epsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{2n-1} \mathbb{V}(Y_{n,i})}$$

sont tous vides. En déduire un TCL pour Z_{2n-1}.

B.3 (1 pt) On pose $S_{2n-1} = \sum_{i=1}^{2n-1} Y_{n,i}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_{(n)} - \frac{1}{2} \leq \frac{t}{\sqrt{8n}}\right) = \mathbb{P}(S_{2n-1} \geq 0)$$

B.4 (1 pt) Montrer qu'il existe a_n tel que

$$\mathbb{P}(S_{2n-1} \geq 0) = \mathbb{P}(Z_{2n-1} \geq a_n)$$

et montrer que $a_n \to -t$ quand n tend vers l'infini.

B.5 (2 pts) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(X_{(n)} - \frac{1}{2} \leq \frac{t}{\sqrt{8n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

Exercice 2 (5 pts)

Soient $N \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, $X = \exp(N)$ et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X.

1. (1pt) Donner la densité de X et calculer son espérance. (On donne : $\mathbb{V}(X) = e^{2\mu+2} - e^{2\mu+1}$).

2. (1pt) Soit $T_n = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - 1/2$. Montrer que $T_n \to \mu$ presque sûrement.

3. (3pts) Calculer, par la δ-méthode, la loi limite de

$$\sqrt{n}(T_n - \mu).$$