Université Paris Dauphine — Année 2003-2004
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD3 - Statistique Inférentielle

Feuille de Travaux Dirigés 1

Convergence et théorèmes limites

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ et on pose $Y_n = X_n - [X_n]$, où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n.
Montrez que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont vous préciserez la loi.

Exercice 2. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que X_n suit la loi exponentielle de paramètre n. Soit

$$Y_n = \sin\left([X_n]\frac{\pi}{2}\right),$$

où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire Y_n, et calculez $E(Y_n)$.
2. Montrez que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante Y que vous préciserez.
3. Vérifiez la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3. Montrer que si $X_n = O_{\mathbb{P}}(f_n)$ et $Y_n = O_{\mathbb{P}}(g_n)$.

$$\begin{aligned} X_nY_n &= O_{\mathbb{P}}(f_ng_n) \\ |X_n|^s &= O_{\mathbb{P}}(f_n^s) \quad \textit{pour } s > 0 \\ X_n + Y_n &= O_{\mathbb{P}}(\max(f_n, g_n)) \end{aligned}$$

et si $X_n = o_{\mathbb{P}}(f_n)$ et $Y_n = 0_{\mathbb{P}}(g_n)$

$$X_nY_n = o_{\mathbb{P}}(f_ng_n)$$

Exercice 4.

1. Déterminer la fonction caractéristique de la loi continue uniforme sur $[0, 1]$.
2. Pour tout n, on définit la v.a. X_n par

$$\mathbb{P}(X_n = 1/2^n) = \mathbb{P}(X_n = -1/2^n) = \frac{1}{2}$$

et on suppose que les X_n sont mutuellement indépendantes.. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que (S_n) converge en loi vers une v.a. S dont on précisera la loi.

Exercice 5. Montrer que

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

implique

$$\exists (a_n) \text{ tel que } a_n \to 0 \text{ et } \hat{\theta}_n - \theta = O_{\mathbb{P}}(a_n).$$

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. telle que $\mathbb{E}X_n = \mu$ et $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Montrer alors directement

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

Exercice 7. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. issu de la loi $\mathcal{P}(1)$. Rappelez sans démonstration la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$. Déduisez de ce résultat et du théorème central limite que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8. Un TCL pour la variance empirique.
Soit (Y_i) une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}Y_1^4 = m_4 < \infty$, et on note $\mathbb{E}Y_1 = \mu$ et $var(Y_1) = \sigma^2$. On considère l'estimateur de la variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2.$$

1. Montrer que
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2 + (\bar{Y}_n - \mu)^2$$
et en déduire que $S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$.
2. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)^2 = O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$.
3. En déduire que
$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$
et préciser γ.

Exercice 9. Soit (X_i) une suite de v.a.i.i.d. et notons F leur fonction de répartition commune. Soit pour x donné,

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \le x\}}.$$

Montrer que $\mathbb{E}\hat{F}_n(x) = F(x)$ puis que $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{p.s.} F(x)$. Montrer finalement que

$$\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

et préciser γ.

Exercice 10. Un TCL pour la variance empirique II.
Soit (Y_i) une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}Y_1^4 = m_4 < \infty$, et on note $\mathbb{E}Y_1^k = m_k$ $(k = 1, ..., 4)$ et $var(Y_1) = \sigma^2$. On considère l'estimateur de la variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2.$$

1. Montrer qu'il existe ϕ telle que

$$S_n^2 = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right).$$

2. Montrer que

$$\sqrt{n}\left(\left[\begin{array}{c} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{array}\right] - \mu\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right], \Sigma\right)$$

   en précisant μ et Σ.

3. En utilisant la δ-méthode, montrer

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

   et préciser γ.

Exercice 11. Normalisation de la variance par la δ-méthode.
Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\theta$. On suppose que l'on dispose d'un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ fonction de $X_1, ..., X_n$ tel que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

pour une fonction $\sigma^2(\cdot)$ connue.

1. Comment choisir ϕ telle que $\sqrt{n}(\phi(\hat{\theta}_n) - \phi(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Appliquer au cas où $P_\theta = \mathcal{B}(\theta)$ et $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$.

Exercice 12. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. i.i.d. indépendantes entre elles et on pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$S^2_{n_1,n_2} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y}_n)^2\right).$$

On suppose $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y_1^2 < \infty$ et $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1$. Montrer que si $\frac{n_1}{n_1+n_2} \to \lambda$ $(0 < \lambda < 1)$ avec $n_1 + n_2 \to \infty$, on a

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}}{S_{n_1,n_2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{(1-\lambda\sigma_X^2 + \lambda\sigma_Y^2}{(\lambda\sigma_X^2 + (1-\lambda)\sigma_Y^2}\right)$$

avec $\sigma_X^2 = var(X_1)$ et $\sigma_Y^2 = var(Y_1)$.

Exercice 13. Soit (X_i) une suite de v.a. indépendantes avec $\mathbb{E}X_i = \mu_i$ et $\mathbb{E}X_i^2 = m_i^2$. On suppose que pour tout i on a $m_i^2 - \mu_i^2 > \sigma$ et $\mathbb{E}X_i^4 < M$. Montrer alors

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (m_i^2 - \mu_i^2)}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$