Processus stationnaires – modèles ARMA

Angelina Roche

Executive Master Statistique et Big Data

2018–2019

Rappels cours précédent

- Une série temporelle est l'observation d'une quantité X_t mesurée à des temps différents $t_1, ..., t_n$.
- Outils graphiques : chronogramme (`plot.ts()`), diagramme retardé (`lag.plot()`), chronogramme par saison (`monthplot()`).
- On modélise souvent une série temporelle par un des modèles suivants :
  - modèle additif $X_t = m_t + s_t + Z_t$ (`decompose()`, `stl()`,...),
  - modèle multiplicatif $X_t = m_t s_t (1 + Z_t)$ (`decompose()` avec option `type='multiplicative'`,...).

Plan du cours d'aujourd'hui

Stationnarité

Modèles ARMA(p,q)

Meilleur prédicteur linéaire et fonction d'autocorrélation partielle

Plan

Stationnarité

Modèles ARMA(p,q)

Meilleur prédicteur linéaire et fonction d'autocorrélation partielle

Processus stationnaire

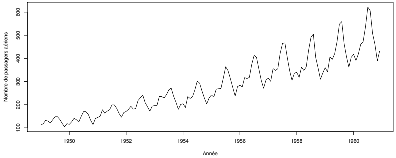
Définition

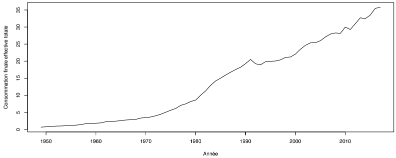
Un processus stochastique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit (faiblement) stationnaire si :

- sa moyenne $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t (constante),
- pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-h})$ ne dépend pas de t (uniquement de h).

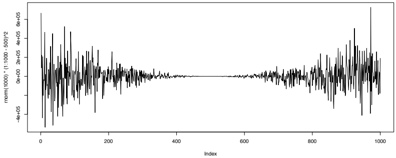
Exemple de processus non stationnaires

Processus à moyenne variable :





Processus à variance variable :



Bruit blanc

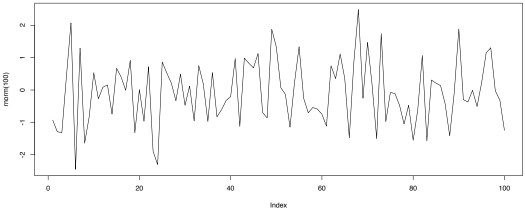
Définitions

- Un bruit blanc $\{Z_t, t \in T\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées, de moyenne nulle et de variance constante.
- Un bruit blanc gaussien $\{Z_t, t \in T\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d de loi normale.

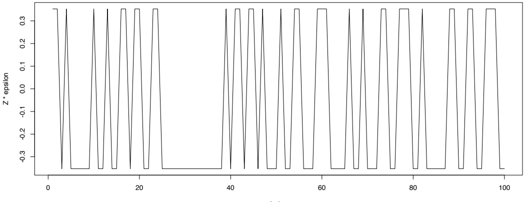
Un bruit blanc est un processus stationnaire.

Bruit blanc

Bruit blanc gaussien :



Bruit blanc non gaussien :



Fonction d'autocovariance

Définition

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire, on appelle fonction d'autocovariance de X la fonction :

$$h \mapsto \gamma_X(h) := \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}).$$

Propriétés

- $\gamma_X(0) = \mathrm{Var}(X_t) \geq 0$;
- $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$, pour tout h ;
- $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, pour tout h.

Fonction d'autocorrélation

Définition

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire, on appelle fonction d'autocorrélation (ou ACF) de X la fonction :

$$h \mapsto \rho_X(h) := \mathrm{Cor}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

Propriétés

- $\rho_X(0) = 1$;
- $|\rho_X(h)| \leq 1$, pour tout h ;
- $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$, pour tout h.

Estimation de la moyenne et des fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

- Supposons que l'on observe $X_1, \dots, X_n$.
- Estimation de la moyenne $\mu_X = \mathbb{E}[X_t]$ (`mean()`)

$$\widehat{\mu}_X := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- Estimation de la fonction d'autocovariance γ_X (`acf()`) :

$$\widehat{\gamma}_X(h) := \frac{1}{n} \sum_{i=h+1}^{n} (X_i - \widehat{\mu}_X)(X_{i-h} - \widehat{\mu}_X) \text{ pour } h = 0, \dots, n-1.$$

- Estimation de la fonction d'autocorrélation ρ_X (`acf()`) :

$$\widehat{\rho}_X(h) := \frac{\widehat{\gamma}_X(h)}{\widehat{\gamma}_X(0)} \text{ pour } h = 0, \dots, n-1.$$

Normalité asymptotique

Normalité asymptotique de l'autocorrélation empirique

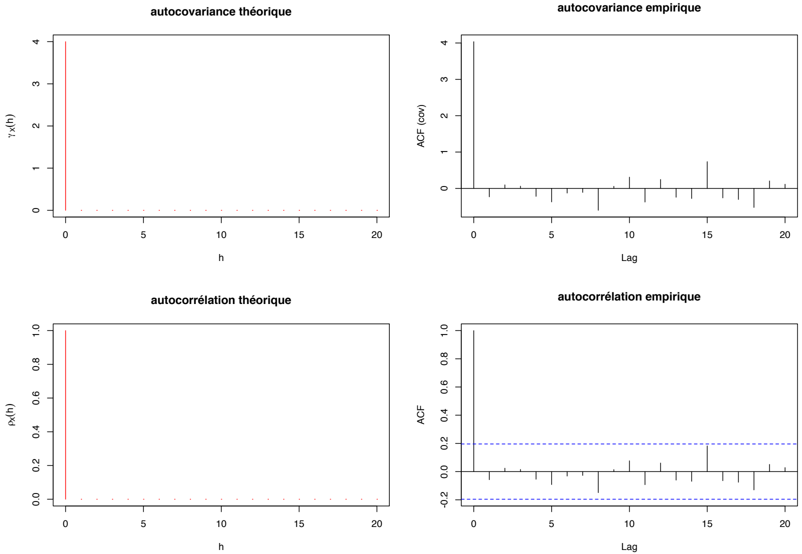
Sous certaines hypothèses assez génériques,

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\rho}_X(1)\\ \vdots \\ \widehat{\rho}_X(h)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\rho_X(1)\\ \vdots \\ \rho_X(h)\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,T),$$

où $T = (T_{j,k})_{1\leq j,k\leq h}$ est donnée par la formule de Bartlett,

$$T_{j,k} = \sum_{r=1}^{+\infty} \left(\rho_X(r+j) + \rho_X(r-j) - 2\rho_X(j)\rho_X(r)\right)\left(\rho_X(r+k) + \rho_X(r-k) - 2\rho_X(k)\rho_X(r)\right).$$

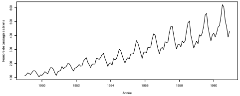
Exemple du bruit blanc



Comment se ramener à une série stationnaire ?

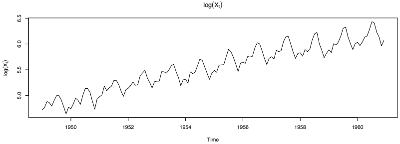
- Opérateur retard : $BX_t = X_{t-1}$, $B^2X_t = BBX_t = X_{t-2}$,..., $B^kX_t = X_{t-k}$.
- Opérateur différence (`diff()`) : $\Delta = (I - B)$. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ $\hookrightarrow$ élimine une tendance linéaire. Plus généralement Δ^k élimine une tendance polynomiale d'ordre k.
- Opérateur différence saisonnière :$\Delta_k = (1 - B^k)$$\hookrightarrow$ élimine une saisonnalité de période k.
- En présence d'hétéroscedasticité (variance non constante) on transforme généralement les données (transformation log, $\sqrt{\cdot}$,...).

Exemple : évolution du nombre de passagers aériens

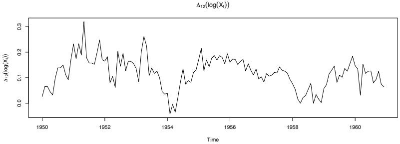


Méthode 1 :

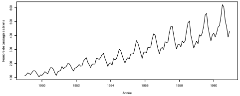
1. Transformation log pour stabiliser la variance (`log(AirPassengers)`) :



2. Différentiation saisonnière (`diff(log(AirPassengers),lag=12)`) :

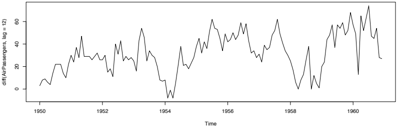


Exemple : évolution du nombre de passagers aériens

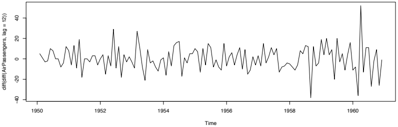


Méthode 2 :

1. Différentiation saisonnière (`diff(AirPassengers,lag=12)`) :



2. Différentiation pour éliminer la tendance (`diff(diff(AirPassengers,lag=12))`) :



Plan

Stationnarité

Modèles ARMA(p,q)

Meilleur prédicteur linéaire et fonction d'autocorrélation partielle

Processus AR(p)

Définition

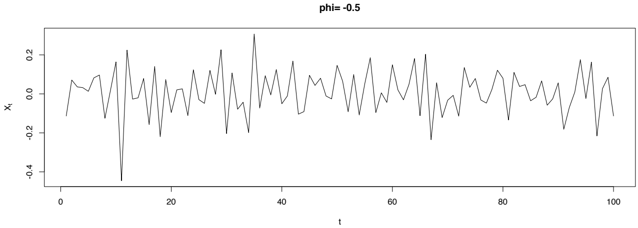
Un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit autorégressif d'ordre p (ou AR(p)) s'il obéit à une équation du type

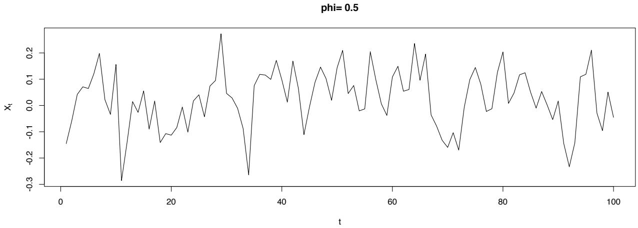
$$X_t = c + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + ... + \varphi_p X_{t-p} + Z_t, \forall t \in \mathbb{Z},$$

avec :

- $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_p) \in \mathbb{R}^p$,
- $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc.

Exemples processus AR(1) : $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$





Processus MA(q)

Définition

Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q (ou MA(q)) si

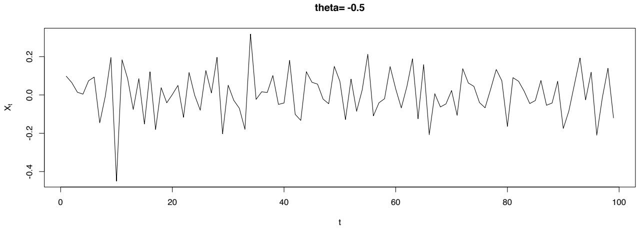
$$X_t = \mu + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \ldots + \theta_q Z_{t-q}, \forall t \in \mathbb{Z},$$

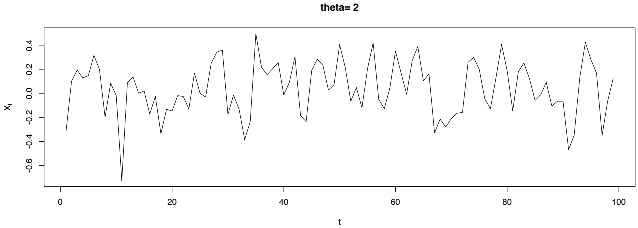
avec :

- $\mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$,
- $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc.

Un processus MA(q) est toujours stationnaire.

Exemples processus MA(1) : $X_t = \theta Z_{t-1} + Z_t$





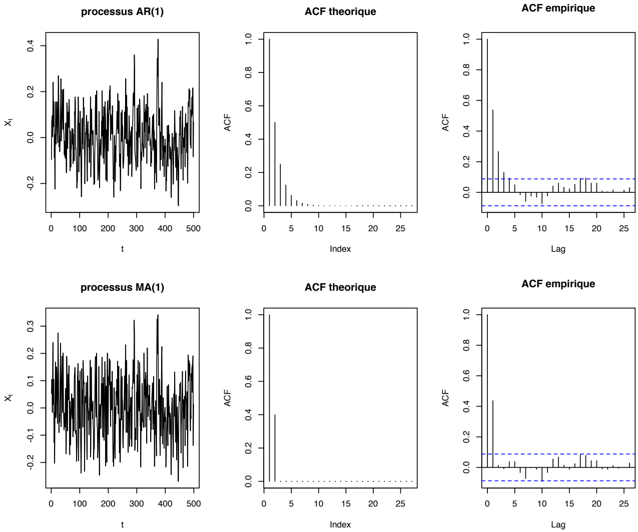
Fonction d'autocorrélation d'un MA(q)

Si $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus MA(q) de paramètres $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_q)$, alors :

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma_Z^2 & \text{si } h = 0, \\ (\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + ... + \theta_q\theta_{q-h})\sigma_Z^2 & \text{si } 1 \leq h \leq q, \\ 0 & \text{si } h > q, \end{cases}$$

avec $\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z_t)$.

Exemples


processus AR(1)
ACF theorique
ACF empirique
X_t
t
ACF
Index
Lag
processus MA(1)
ACF theorique
ACF empirique

Processus ARMA(p, q)

Définition

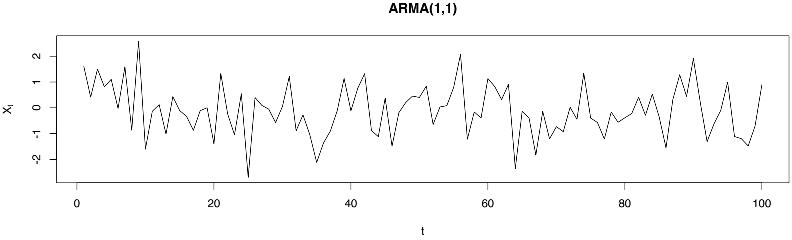
Un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ obéit à un modèle ARMA(p,q) s'il vérifie une équation du type

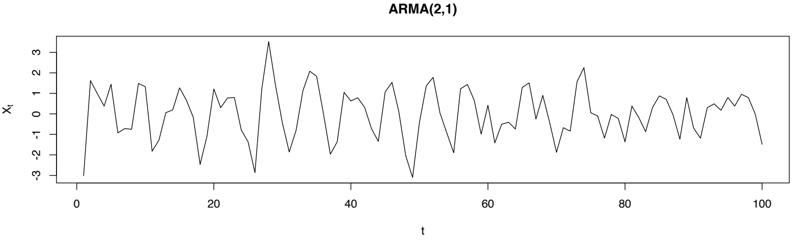
$$X_t = c+\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+\theta_2 Z_{t-2}+\ldots+\theta_q Z_{t-q}, \forall t \in \mathbb{Z},$$

avec :

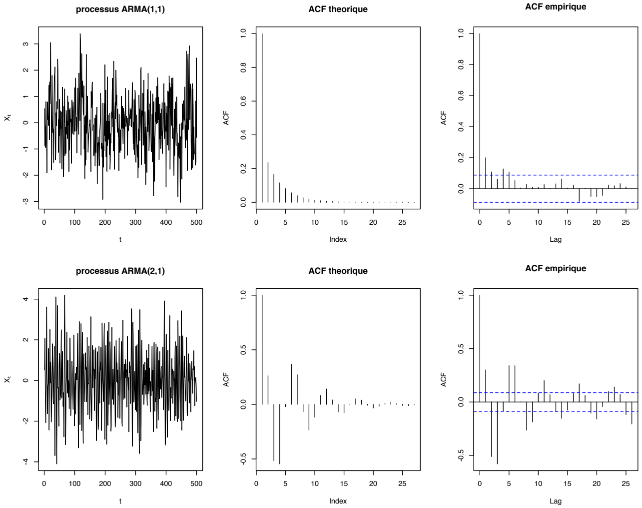
- $c \in \mathbb{R}$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathbb{R}^p$, $(\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$,
- $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc.

Exemples processus ARMA(p,q)





ACF


processus ARMA(1,1)
ACF theorique
ACF empirique
processus ARMA(2,1)
ACF theorique
ACF empirique
X_t
t
ACF
Index
Lag

Plan

Stationnarité

Modèles ARMA(p,q)

Meilleur prédicteur linéaire et fonction d'autocorrélation partielle

Meilleur prédicteur linéaire d'un processus stationnaire

- On observe $X_1, ..., X_n$ et l'on veut prédire au mieux X_t pour $t > n$.
- Le meilleur prédicteur linéaire de X_t, sachant les observations $X_1, ..., X_n$, est la quantité

$$X_{t|n} = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j X_{n+1-j}$$

 où $a_0, a_1, ..., a_n$ définis de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne

$$EQM = \mathbb{E}\left[\left(X_t - X_{t|n}\right)^2\right].$$

- La résolution du problème de minimisation nous donne :

$$a_0 = \mu_X \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \text{ et } \Gamma_n \mathbf{a}_n = \gamma_n(h),$$

 où $\mathbf{a}_n = (a_1, ..., a_n)^t$, $\Gamma_n = (\gamma_X(i-j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\gamma_n(h) = (\gamma_X(h), ..., \gamma_X(h+n-1))^t$.

Fonction d'autocorrélation partielle

Définition

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire centré ($\mu_X = 0$). La fonction d'autocorrélation partielle (ou PACF) est la fonction

$$p_X(h) = a_h^{(h)},$$

où $a_h^{(h)}$ tel que

$$X_{h|h-1} = \sum_{j=1}^{h} a_j^{(h)} X_{h+1-j}.$$

PACF théorique

La PACF d'un AR(p) est nulle à partir de l'ordre $p + 1$.

Estimation de la PACF

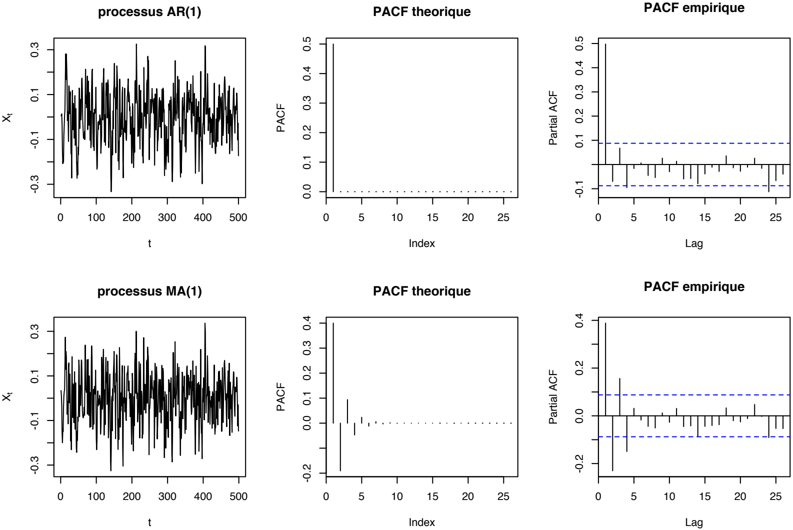
On peut estimer la PACF d'un processus stationnaire à partir d'une estimation de son ACF par l'algorithme de Durbin-Levinson.

Propriétés de $\widehat{p}_X$

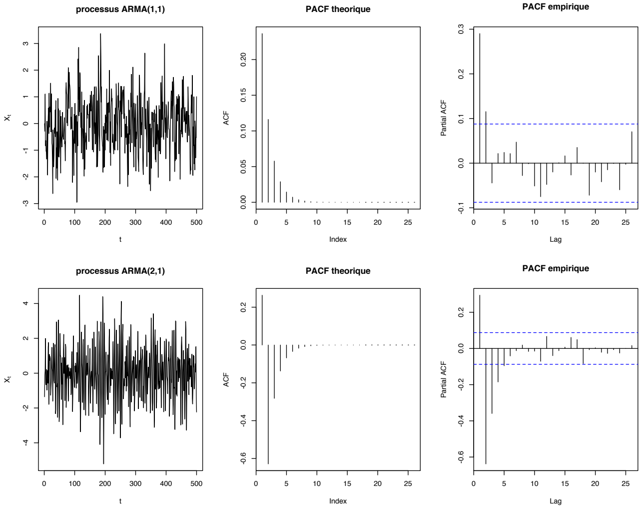
Si $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un AR(p) alors :

- $\widehat{p}_X(p)$ converge vers $p_X(p)$ quand $n \to +\infty$,
- $\widehat{p}_X(h)$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$ pour tout $h > p$,
- $\mathrm{Var}(\widehat{p}_X(h))$ de l'ordre de $1/n$ pour tout $h > p$.

Exemples : processus AR(p) ou MA(q)



Processus ARMA(p,q)



Identification d'un ARMA(p,q) : méthode de Box et Jenkins

1. Se ramener à un processus stationnaire : transformer éventuellement les données, éliminer la tendance et la saisonnalité,...

2. Identifier p et q :

   - À l'aide des tracés de l'ACF et de la PACF empirique :

Fonction	MA(q)	AR(p)	ARMA(p,q)	BB
ACF	0 à. p. rg(q)	déc. exp.	déc. exp.	0
PACF	déc. exp.	0 à. p. rg(p)	déc. exp.	0

   - Critère $AIC = n\log(\widehat{\sigma}_Z^2) + 2(p+q)$, $AICc = AIC + 2(p+q)(p+q+1)/(n-p-q-1)$ (petits échantillons), BIC,...
   - Modélisation automatique : fonctions `auto.arima()` de forecast, `armasubsets()` de TSA, `armaselect()` de caschrono,...

Estimation des paramètres φ et θ

- Lorsque p et q sont fixés, nous pouvons estimer les paramètres φ et θ du modèle choisi.

- Méthode classique : maximum de vraisemblance dont il existe différentes variantes (`arima()` ou `ar()`, `Arima()` de forecast, `arimax()` de TSA,....).