Lissage exponentiel

Angelina Roche

Executive Master Statistique et Big Data

2018–2019

Rappels cours précédents

- Nous observons $X_1, \ldots, X_n$ une quantité qui évolue avec le temps.
- Dans les cours précédents nous avons vu comment :
  - Modéliser la partie non aléatoire de la série (tendance et saisonnalité).
  - Supprimer la tendance et la saisonnalité pour se ramener à un processus stationnaire.
  - Modéliser un processus stationnaire à l'aide d'un modèle de type ARMA(p,q).

Plan du cours d'aujourd'hui

- Principe du lissage exponentiel
- Lissage exponentiel simple
- Lissage exponentiel double (méthode de Holt)
- Méthode de Holt-Winters ou lissage exponentiel triple
- Autres méthodes

Plan

Lissage exponentiel

- Ensemble de méthodes de calculs de prédiction d'une série, centrées sur une mise à jour facile de la prédiction à l'arrivée d'une nouvelle observation.

- Introduites par Holt (1957) et par Brown (1962) comme des méthodes empiriques. Plus récemment des résultats théoriques ont été prouvés.

Prévision et erreur de prévision

- Pour un horizon $h > 0$, nous souhaitons prévoir X_{t+h} à partir de $X_1, ..., X_t$. Nous notons

$$X_{t+h|t} = \mathbb{E}\left[X_{t+h}|X_1, ..., X_t\right]$$

- Les modèles de lissage exponentiel prévoient différentes modélisations de $X_{t+h|t}$.
- Nous noterons l'erreur de prévision à l'horizon 1 au temps t : $Z_t = X_t - X_{t|t-1}$

Plan

Lissage exponentiel simple (I)

- Il s'agit de prédire une série $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ sans saisonnalité avec une tendance localement constante.

- Supposons que nous ayons construit une prédiction $\hat{X}_{t|t-1}$ de X_t à partir de $X_1, \ldots, X_{t-1}$ et que nous disposons maintenant d'une nouvelle observation X_t, nous prédisons

$$\hat{X}_{t+1|t} = \hat{X}_{t|t-1} + \alpha e_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t|t-1}$$

 où $0 < \alpha < 1$ est un paramètre et $e_t = X_t - \hat{X}_{t|t-1}$ est l'erreur commise au temps $t-1$.

- Initialisation : $\hat{X}_{1|0} = X_1$ (par exemple).

- À l'horizon h, nous prédisons :

$$\hat{X}_{t+h|t} = \hat{X}_{t+1|t}.$$

Lissage exponentiel simple (II)

- Par récurrence, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t+1|t} &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j X_{t-j} + \ldots \\ &\quad + \alpha(1-\alpha)^{t-1}X_1 + (1-\alpha)^t \hat{X}_{1|0},\end{aligned}$$

d'où le terme lissage exponentiel.

Représentation espace-état

Définition

La série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ obéit à un modèle de lissage exponentiel simple (LES) si

$$
\begin{aligned}
\ell_t &= \ell_{t-1} + \alpha Z_t && (2.1)\\
X_t &= \ell_{t-1} + Z_t && (2.2)
\end{aligned}
$$

où ℓ_t est appelé état au temps t et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien appelé innovation.

- L'équation (2.1) est appelée équation d'état ou équation de transition.
- L'équation (2.2) est appelée équation d'observation.

Remarque :

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suit un modèle LES de paramètre α alors ΔX suit un modèle MA(1).

En pratique :

- On pose $\hat{\ell}_1 = X_1$ (par exemple) puis, par récurrence,

$$\hat{\ell}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{\ell}_{t-1}.$$

- Pour un horizon h pas trop grand, on définit

$$\widehat{X}_{t+h|t} = \widehat{\ell}_t.$$

- Le paramètre α est estimé par maximisation de la vraisemblance du modèle LES.
- Fonctions `HoltWinters()`, `ets()` de forecast,...

Exemple : données simulées avec $\alpha = 0.5$

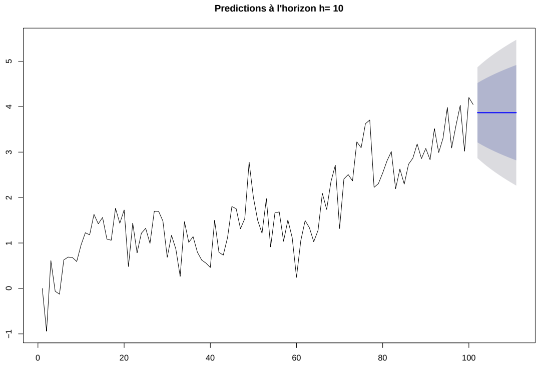

Figure – En noir : observation de la série jusqu'au temps $t = 100$, en bleu : prédictions par lissage exponentiel avec intervalles de prédiction à 80% (bleu) et 95% (bleu clair).

Exemple : évolution des ventes d'un produit

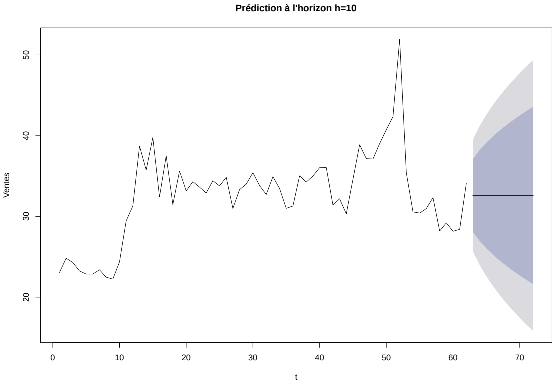

Figure – En noir : observation de la série jusqu'au temps $t = 100$, en bleu : prédictions par lissage exponentiel avec intervalles de prédiction à 80% (bleu) et 95% (bleu clair).

Plan

Principe

- Mise à jour avec tendance localement linéaire. La prédiction de X_{t+h} connaissant $X_1, ..., X_t$ s'écrit

$$\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t,$$

où ℓ_t est appelé niveau et b_t la pente.

- Soient $\alpha, \beta^* \in]0, 1[$.
  - Mise à jour du niveau

$$\ell_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}) = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t.$$

  - Mise à jour de la pente :

$$b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1} = b_{t-1} + \alpha\beta e_t,$$

avec $\beta = \alpha\beta^*$.

Représentation espace-état

Définition

La série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ obéit à un modèle de lissage exponentiel double (LED) si elle vérifie :

$$
\begin{aligned}
X_t &= \ell_t + b_t + Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_t \\ b_t \end{pmatrix} + Z_t && (3.1)\\
\begin{pmatrix} \ell_t \\ b_t \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} \ell_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} Z_t, && (3.2)
\end{aligned}
$$

où $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition.

Remarque :

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suit un modèle LED alors $\Delta^2 X$ est un processus MA(2).

Exemple : données simulées avec $\alpha = 0.8$ et $\beta = 0.4$

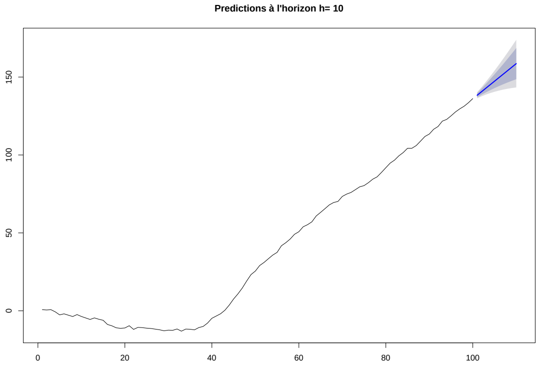

Figure – En noir : observation de la série jusqu'au temps $t = 100$, en bleu : prédictions par lissage exponentiel avec intervalles de prédiction à 80% (bleu) et 95% (bleu clair).

Exemple : évolution des ventes d'un produit

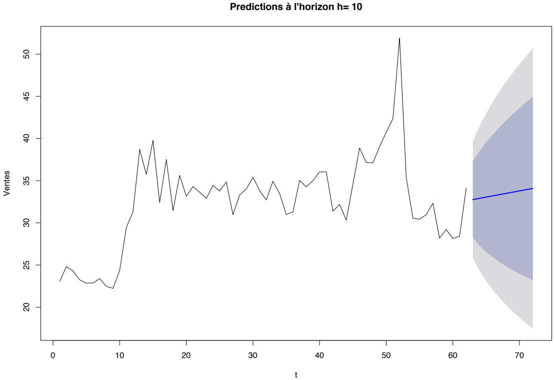

Figure – En noir : observation de la série jusqu'au temps $t = 100$, en bleu : prédictions par lissage exponentiel avec intervalles de prédiction à 80% (bleu) et 95% (bleu clair).

Plan

Principe

- Prise en compte d'une composante saisonnière s_t de période connue m.

$$\hat{X}_{t|t-1} = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$$

- Soient $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1[$. Quand une nouvelle observation X_t est disponible.
  - Mise à jour du niveau :

$$\ell_t = \alpha(X_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}).$$

  - Mise à jour de la pente :

$$b_t = \beta(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}.$$

  - Mise à jour de la saisonnalité :

$$s_t = \gamma(X_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}.$$

- Prévision à l'horizon h :

$$\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t + s_{t-m+h_m^+},$$

où $h_m^+ - 1$ est le reste de la division euclidienne de $h-1$ par m.

Plan

Prédictions basées sur des décompositions multiplicatives

- Méthode de Holt-Winters multiplicative :

$$\hat{X}_{t+h|t} = (\ell_t + hb_t)s_{t-m+h_m^+}$$

- Composante tendancielle multiplicative.
  - Sans composante saisonnière : $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t b_t^h$.
  - Avec composante saisonnière additive : $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t b_t^h + s_{t-m+h_m^+}$.
  - Avec composante saisonnière multiplicative : $\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t b_t^h s_{t-m+h_m^+}$.

Composante tendancielle amortie

- Composante tendancielle additive amortie : $\ell_t + hb_t$ est remplacé par $\ell_t + \phi_h b_t$ où $\phi_h = 1 + \phi + ... + \phi^h$ avec $\phi \in]0, 1[$ un paramètre.
- Composante tendancielle multiplicative amortie : $\ell_t b_t^h$ est remplacé par $\ell_t b_t^{\phi_h}$.

Modèles espace-état

Chaque méthode de lissage exponentiel est associé à plusieurs modèles représentés par une équation espace-état du type.

- Modèle avec erreur additive :

$$\begin{aligned} X_t &= W\mathbf{u}_{t-1} + Z_t \\ \mathbf{u}_t &= F\mathbf{u}_{t-1} + G\mathbf{u}_{t-1}Z_t. \end{aligned}$$

- Modèle avec erreur multiplicative :

$$\begin{aligned} X_t &= W\mathbf{u}_{t-1}(1 + Z_t) \\ \mathbf{u}_t &= F\mathbf{u}_{t-1} + G\mathbf{u}_{t-1}Z_t. \end{aligned}$$

Ici $\mathbf{u}_t = (\ell_t, b_t, s_t, ..., s_{t-m})^t$ désigne le vecteur des états au temps t, $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2, W tel que $W\mathbf{u}_{t-1} = \hat{X}_{t|t-1}$.

Remarques finales

- Les paramètres d'estimation (σ^2, α, β, γ ainsi que les valeurs initiales des états) peuvent être estimés par maximisation de la vraisemblance d'un modèle espace-état.
- Les intervalles de prédiction sont dérivés à partir de ces modèles.
- Il est possible de sélectionner un modèle à partir d'un critère de type AIC, AICc ou BIC.

Pour plus d'information...