EXEMPLES DE FILES D'ATTENTE

1. Étude d'une file d'attente M/M/1

On considère une file d'attente qui se forme à un guichet par le modèle suivant : les clients arrivent au guichet selon un processus de Poisson et les temps de service sont des variables exponentielles indépendantes, et indépendantes du processus des arrivées. On note λ le paramètre du processus de Poisson des arrivées et σ le paramètre de la loi des temps de service.

Pour tout $t \geq 0$, on note N_t le nombre de clients présents dans la file (et au guichet) à l'instant t. On suppose que N_0 est une variable aléatoire indépendante du processus des arrivées et des temps de service.

1.1. **Une chaîne de Markov en temps discret.** Soit $(J_n)_{n\geq 0}$ la suite des temps de saut de $(N_t)_{t\geq 0}$ définis par $J_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$J_{n+1} = \inf\{t > J_n : N_t \neq N_{J_n}\}.$$

On définit pour tout $n \geq 0$,

$$Z_n = N_{J_n}.$$

Supposons que l'on connaît la trajectoire de la file jusqu'à l'instant t et qu'à l'instant t il y a i personnes dans la file. Alors d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, la durée avant l'arrivée du prochain client est une variable exponentielle de paramètre λ et le temps de service restant du client au guichet est une variable exponentielle de paramètre σ. Cela signifie que la loi de $(N_{t+s}, s \geq 0)$ conditionnellement au passé jusqu'à t et sachant $N_t = i$ est la loi de $(N_s, s \geq 0)$ sachant $N_0 = i$. Cela implique la proposition suivante.

Proposition 1.1. *La suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition P est donnée par $P(0,1) = 1$ et pour $i \geq 1$,*

$$P(i, i+1) = 1 - P(i, i-1) = \frac{\lambda}{\lambda + \sigma}.$$

1.2. **Le cas récurrent positif.** Dans le cas où $\rho := \lambda/\sigma < 1$, la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive. Sa loi stationnaire π est donnée par

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{2}\,; \quad \pi_k = \frac{(1-\rho^2)\rho^{k-1}}{2}\,,\ k \geq 1.$$

On en déduit qu'à l'équilibre, le nombre moyen $N := \mathbb{E}_\pi(Z_n)$ de clients dans la file est

$$N = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}, \tag{1}$$

et le temps moyen T qu'un client passe dans la file (en comptant son temps de service) est

$$T = \frac{\mathbb{E}_\pi(Z_n + 1)}{\sigma} = \frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{\sigma - \lambda}. \tag{2}$$

2. Étude d'une file d'attente M/G/1

Ce modèle est plus général. Le mécanisme de formation de la file d'attente est le même que précédemment mais on ne fait plus d'hypothèse sur la loi des temps de service. On note ν la loi des temps de service et L la transformée de Laplace de ν c'est-à-dire

$$L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\nu(\mathrm{d}t)\,,\ x \geq 0.$$

On suppose que ν admet un premier moment que l'on note μ.

2.1. **Une chaîne de Markov en temps discret.** Pour tout $n \geq 1$ on note X_n le nombre de clients présents dans la file d'attente (et au guichet) juste après le n-ème départ, et X_0 le nombre initial de clients dans la file d'attente (comme précédemment la variable X_0 est indépendante du processus des arrivées et des temps de service). En notant Y_n le nombre d'arrivées pendant le temps de service du n-ème client, on remarque que

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \mathbb{1}_{\{X_n>0\}}.$$

Proposition 2.1. *Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, indépendantes de X_0, et de loi commune de fonction génératrice A donnée par*

$$A(z) = L(\lambda(1-z))\,,\ z \in [-1,1].$$

Preuve. Il est clair que les variables Y_n sont indépendantes de X_0. Soit $n \geq 1$. Notons $S_1, \ldots, S_n$ les durées des temps de service des n premiers clients. Alors, conditionnellement à $S_1, \ldots, S_n$, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et distribuées selon les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda S_1, \ldots, \lambda S_n$. Ainsi, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et de loi commune de fonction génératrice A. □

Notons ζ la loi des variables Y_n. On déduit de la proposition 2.1 que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q donnée par

$$\begin{aligned} Q(i,j) &= \zeta(j-i+1),\ \ 1 \leq i \leq j+1, \\ Q(0,j) &= \zeta(j),\ \ j \geq 0. \end{aligned}$$

De plus on voit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible.

2.2. **Le cas récurrent positif.** Notons $\rho := \lambda\mu$. On a

$$\mathbb{E}(Y_1) = \rho. \tag{3}$$

Proposition 2.2. *Si $\rho < 1$ alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ est récurrente positive.*

Preuve. On note $Z_n = \#\{k \in \{0, \ldots, n-1\} : X_k = 0\}$ le nombre de passages de la chaîne en 0 avant l'instant n. On remarque alors que

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n - n + Z_n.$$

On en déduit que p.s.,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} \geq (1-\rho). \tag{4}$$

Ainsi $Z_n \to \infty$ p.s. ce qui signifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente.

Par ailleurs, notons $R_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$ le temps de retour en 0. En utilisant le théorème ergodique, on montre que

$$\mathbb{E}_0(R_0) \leq \frac{1}{1-\rho}, \tag{5}$$

ce qui signifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive. □

Notons η la loi invariante de $(X_n)_{n\geq 0}$ et G la fonction génératrice de η. Soit $N = \mathbb{E}_\eta(X_n)$ le nombre moyen de clients dans la file à l'équilibre.

Proposition 2.3. *On suppose que ν admet un deuxième moment que l'on note μ_2. Alors on a*

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 \mu_2}{2(1-\rho)}.$$

Preuve. En remarquant que $zG(z) = \mathbb{E}_\eta(z^{X_{n+1}+1})$, on montre que

$$zG(z) = A(z)\left(\eta(0)(z-1) + G(z)\right). \tag{6}$$

Ainsi on a

$$G(z)(A(z)-z) = \eta(0)A(z)(1-z). \tag{7}$$

Or A est dérivable à gauche en 1 de dérivée $A'(1) = \rho$ donc

$$\frac{A(z)-z}{1-z} \underset{z\uparrow 1}{\longrightarrow} 1-\rho.$$

On peut réécrire (7) en

$$\frac{A(z)-z}{1-z} = \frac{\eta(0)A(z)}{G(z)}.$$

Comme $A(1) = G(1) = 1$ on en déduit que

$$\frac{A(z)-z}{1-z} \underset{z\uparrow 1}{\longrightarrow} \eta(0), \tag{8}$$

ainsi $\eta(0) = 1-\rho$. On a donc

$$G(z) = (1-\rho)(1-z)\frac{A(z)}{A(z)-z}. \tag{9}$$

En dérivant (7), on obtient

$$G'(z)(A(z)-z) + G(z)(A'(z)-1) = (1-\rho)(A'(z)(1-z) - A(z)).$$

En remplaçant $G(z)$ grâce à (9), on trouve

$$G'(z) = (1-\rho)\frac{A'(z)(1-z)}{A(z)-z} - (1-\rho)A(z)\frac{(A(z)-z) + (1-z)(A'(z)-1)}{(A(z)-z)^2}.$$

D'après (8), on a

$$(1-\rho)\frac{A'(z)(1-z)}{A(z)-z} \underset{z\uparrow 1}{\longrightarrow} \rho.$$

De plus,
$$\frac{A''(z)(1-z)}{2(A(z)-z)(A'(z)-1)} \underset{z\uparrow 1}{\longrightarrow} -\frac{A''(1)}{2(1-\rho)^2}.$$
On a donc d'après la règle de l'Hospital,
$$G'(z) \underset{z\uparrow 1}{\longrightarrow} \rho + \frac{A''(1)}{2(1-\rho)} = G'(1).$$
Or $A''(1) = \lambda^2 L''(0) = \lambda^2 \mu_2$ et $N = G'(1)$ donc N est bien de la forme annoncée. □

3. Étude d'une file M/G/∞

On considère des clients arrivant à une infinité de guichets selon un processus de Poisson, les temps de service formant une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendante du processus des arrivées. Quand un client arrive, il est immédiatement servi.

Pour chaque instant $t \geq 0$ on note M_t le nombre de clients en train de se faire servir à l'instant t (on suppose que $M_0 = 0$). Le but de cette partie est de donner la loi de M_t pour tout $t \geq 0$.

Notons $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$ le processus de Poisson des arrivées, $(A_n)_{n\geq 1}$ les temps de sauts de ce processus (c'est-à-dire les instants d'arrivée des clients) et λ le paramètre de $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$. On note aussi ν la loi des temps de service, et l'on pose pour tout $t \geq 0$,
$$p_t = \frac{1}{t}\int_0^t \nu([s,+\infty[)\mathrm{d}s.$$

Proposition 3.1. *Pour tous $t \geq 0$, $n \geq 0$ et $k \in \{0,\dots,n\}$, on a*
$$\mathbb{P}(M_t = k \mid \Lambda_t = n) = \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k}.$$

Preuve. Conditionnellement à $\{\Lambda_t = n\}$, les variables $A_1,\dots,A_n$ sont distribuées comme le réarrangement croissant de n variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,t]$, c'est-à-dire que pour $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable,
$$\mathbb{E}(f(A_1,\dots,A_n) \mid \Lambda_t = n) = \frac{n!}{t^n}\int_{\{0\leq a_1\leq \dots \leq a_n \leq t\}} f(a_1,\dots,a_n)\mathrm{d}a_1\dots\mathrm{d}a_n. \tag{10}$$
De plus, la probabilité qu'un temps de service soit plus long que s est $\nu([s,+\infty[)$. Donc si une personne arrive uniformément entre 0 et t devant l'infinité de guichet, la probabilité qu'elle soit encore en train d'être servie à l'instant t est égale à p_t. Cela implique la proposition. □

On déduit de la proposition 3.1 que M_t suit la loi de Poisson de paramètre
$$\lambda\int_0^t \nu([s,+\infty[)\mathrm{d}s.$$

4. Suggestions de développements

Pour la partie 1 :

- Démontrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
- Montrer que π est la loi stationnaire de $(Z_n)_{n\geq 0}$ et montrer (1).
- Justifier l'égalité (2).

Pour la partie 2 :

- Montrer que la fonction génératrice de Y_1 est donnée par A et justifier (3).
- Démontrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible.
- Justifier les inégalités (4) et (5).
- Montrer (6).

Pour la partie 3 :

- Détailler la preuve de la proposition 3.1.
- Démontrer que M_t suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \int_0^t \nu([s, +\infty[)\mathrm{d}s$.