Analyse 2
Examen partiel corrigé

question 2

Si f et g sont deux fonctions C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$), les fonctions $f\,g'$ et $f'\,g$ sont continues sur $[a,b]$, et leur somme $f\,g' + f'g$ y admet pour primitive $f\,g$. On en déduit :

$$\int_a^b [\, f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x) \,]\, dx = [\, f(x)\, g(x) \,]_a^b$$

et, par linéarité de l'intégrale, la *formule d'intégration par parties* :

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

En particulier, si f est C^1 sur $[a,b] = [0,1]$, $g(x) = 1/n\, \sin x$ est C^1 sur $[a,b]$, et donc :

$$I_n = \int_0^1 f(x)\, \cos nx\, dx = \left[\frac{1}{n}\, f(x)\, \sin nx\right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 f'(x)\, \sin nx\, dx$$

qui implique :

$$\begin{aligned}
|\, I_n \,| &\leq \frac{1}{n}\, |\, f(1)\, \sin n \,| + \frac{1}{n} \left| \int_0^1 f'(x)\, \sin nx\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{n}\, |\, f(1)|\, |\, \sin n \,| + \frac{1}{n} \int_0^1 |\, f'(x) \,|\, |\, \sin nx \,|\, dx| \\
&\leq \frac{1}{n}\, |\, f(1)| \; + \frac{K}{n} = \frac{|\, f(1) \,| + K}{n}
\end{aligned}$$

où : $K = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\, f'(x) \,|$, ce qui établit : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

□

question 3

On cherche une primitive de $f(x) = e^x\, \ln(1 + e^x)$ sur $I\!R$ en calculant :

$$I = \int_a^x e^\xi\, \ln(1 + e^\xi)\, d\xi$$

pour : $-\infty < a < x < +\infty$.

Pour cela, on utilise le changement de variable : $\xi = \varphi(u) := \ln(e^u - 1)$ en remarquant que φ définit une bijection de classe C^1 de $[\ln(e^a + 1), \ln(e^x + 1)]$ sur $[a, x]$ (φ est C^1 et $\varphi' > 0$ sur $]0, +\infty[$, et donc *a fortiori* sur $[\ln(e^a + 1), \ln(e^x + 1)]$) :

$$I = \int_{\ln(e^a+1)}^{\ln(e^x+1)} e^{\varphi(u)}\, \ln\left(1 + e^{\varphi(u)}\right) \varphi'(u)\, du = \int_{\ln(e^a+1)}^{\ln(e^x+1)} u\, e^u\, du = [(u-1)\, e^u\,]_{\ln(e^a+1)}^{\ln(e^x+1)}$$

On déduit une primitive : $F(x) = (e^x + 1)\, [\, \ln(e^x + 1) - 1\,]$ de f sur $I\!R$.

□

On cherche une primitive de $g(x) = x \arctan x$ sur $\mathbb{R}$ en calculant :

$$J = \int_a^x \xi \arctan \xi \, d\xi$$

pour : $-\infty < a < x < +\infty$.

Pour cela, on intégre par parties en remarquant que les fonctions $f(x) = x^2/2$ et $g(x)$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$, et *a fortiori* sur tout intervalle $[a, x]$ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J &= \int_a^x f'(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^x - \int_a^x f(\xi)\, g'(\xi)\, d\xi \\ &= \left[\frac{\xi^2}{2} \arctan \xi\right]_a^x - \frac{1}{2} \int_a^x \frac{\xi^2}{1+\xi^2}\, d\xi = \left[\frac{1}{2}\, (\xi - \arctan \xi\,)\right]_a^x \end{aligned}$$

On déduit une primitive : $G(x) = \dfrac{x^2}{2} \arctan x + \dfrac{1}{2}(\arctan x - x)$ de g sur $\mathbb{R}$.

□

question 4

La fonction : $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\cos x}$ est bien définie et continue sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Pour calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$, on effectue le changement de variable : $x = \varphi(u) := 2 \arctan u$ en remarquant que φ définit une bijection C^1 de $[0, 1]$ sur $[0, \pi/2]$ (φ est C^1 et $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1 + 2\cos \varphi(u)}\, \varphi'(u)\, du &&= \int_0^1 \frac{2}{3 - u^2}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3} - u} + \frac{1}{\sqrt{3} + u}\right) du &&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{\sqrt{3} + u}{\sqrt{3} - u}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \; = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 \ln (1 + \sqrt{3}) - \ln 2\right] \end{aligned}$$

□