Université Paris-Dauphine **2008-2009**
M1 MMD, cours de Processus Continus

Examen du Mardi 2 Juin, 9h30 - 11h30

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1 *(2,5 points)*

a) - Rappeler la définition d'un PAI.

b) - Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAI réel tel que $e^{u\,X_t} \in \mathcal{L}^1$, pour tout $t \geq 0$ et un certain $u \geq 0$. Montrer que $e^{u\,X_t}/\mathbf{E}(e^{u\,X_t})$ est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale.

Exercice 2 *(3,5 points)*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIScàd réel croissant $\mathcal{L}^1$ tel que $X_0 = 0$.

a) - Donner un exemple d'un tel processus. Rappeler la définition d'un PAS.

b) - Montrer que les variables aléatoires

$$\xi_n = \sup_{t\in]n,n+1]} X_t - X_n$$

forment une suite de va iid.

c) - Montrer que X_t/t converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $t \in \mathbb{N}$, $t \to +\infty$, puis lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, $t \to +\infty$.

Exercice 2 Bis *(3,5 points)*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIScàd réel croissant $\mathcal{L}^1$ tel que $X_0 = 0$.

a) - Donner un exemple d'un tel processus. Rappeler la définition d'un PAS.

b) - Montrer que X_t/t converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $t \in \mathbb{N}$, $t \to +\infty$.

c) - Montrer que la suite (ξ_n) de variables aléatoires définies par $\xi_n = X_{n+1} - X_n$ satisfait $\xi_n/n \to 0$ p.s. En déduire que X_t/t converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, $t \to +\infty$.

Exercice 3 *(4,5 points)*

Soient (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô réels et $\mathcal{L}^2$.

a) - Rappeler la définition d'un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et énoncer la formule d'Itô pour une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et un tel processus.

b) - Etablir la formule d'intégration par partie:

$$X_t\,Y_t = X_0\,Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t d\langle X,Y\rangle_s.$$

c) - Montrer que le processus M_t défini par

$$M_t := X_t\,Y_t - \int_0^t \phi_s\,\psi_s\,ds, \quad X_t := \int_0^t \phi_s\,dB_s, \quad Y_t := \int_0^t \psi_s\,dB_s, \tag{0.1}$$

est une $\mathcal{F}^B$-martingale continue centrée pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}^B\text{-Prog})$.

d) - Avec les notations de la question précédente, montrer que pour $t \geq s \geq 0$

$$\mathbf{E}(X_t\,X_s) = \int_0^s \mathbf{E}(\phi_u^2)\,du.$$

Exercice 4 *(4,5 points)*

a) - Rappeler la définition d'un processus Gaussien. Comment "caractériser" un processus Gaussien?

b) - Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variables aléatoires Gaussiennes est encore une va Gaussienne.

c) - Etant donnés un mouvement brownien standard (B_t) et une fonction déterministe $f \in \mathcal{L}^2(0,T)$, on définit l'intégrale de Wiener

$$X_t := \int_0^t f(s)\,dB_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Montrer que X_t est un processus Gaussien centré.

d) - A l'aide des résultats obtenus dans l'exercice 3, calculer la fonction de covariance $\mathrm{cov}(X_s, X_t)$. En déduire en particulier que (X_t) est un PAI.

e) - Caractériser (en justifiant) le processus

$$Z_t := \sqrt{3}\int_0^{t^{1/3}} u\,dB_u.$$

Exercice 5 *(5 points)*

Soient $N = (N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ses instants de saut, avec la convention $T_0 = 0$. On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$Z_t = t - T_{N_t}, \qquad W_t = T_{N_t+1} - t.$$

Z_t est le temps écoulé depuis le dernier saut (ou depuis l'origine s'il n'y a pas encore eu de saut) à l'instant t et W_t représente le temps d'attente avant le prochain saut.

1. Montrer que pour tout $w \geq 0$ et tout $z \in [0, t[$, on a $\mathbf{P}(Z_t > z, W_t > w) = e^{-\lambda(z+w)}$.

   En déduire les lois de Z_t, W_t, et la fonction de répartition du couple (Z_t, W_t). Montrer que Z_t et W_t sont indépendants.

2. Calculer la limite quand t tend vers l'infini de $\mathbf{E}[Z_t + W_t]$. En déduire que $T_{N_t+1} - T_{N_t}$ n'a pas la même loi que $T_{n+1} - T_n$.