Université Paris-Dauphine — **2009-2010**
Cours de "Processus Continus Approfondis" — Janvier 2010

CHAPITRE 1 - LE MOUVEMENT BROWNIEN

Dans tout ce cours, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité, et $\mathbf{E}$ l'espérance associée.

1 Définition et premières propriétés.

1.1 Définition d'un processus de Lévy, d'un processus de Poisson et du mouvement Brownien.

Cette section est consacrée à la définition d'un processus de Lévy général, ainsi qu'à celles du mouvement Brownien et du processus de Poisson, vus comme cas particuliers de processus de Lévy. Il existe de nombreuses autres caractérisations d'un mouvement Brownien et d'un processus de Poisson dont certaines seront vues dans la suite du cours.

Définition 1.1 *Un processus de Lévy est un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ tel que*
(a) il est à accroissements indépendants (PAI);
(b) il est à accroissements stationnaires (PAS);
(c) ses trajectoires sont continues à droites et admettent des limites à gauche (càdlàg);
(d) $\mathbb{T} = [0, \infty)$, $E = \mathbb{R}^d$ et $X_0 = 0$.

On appelle "taux de transition (de Lévy)" d'un PAIS X (i.e. un processus X vérifiant (a) et (b)) la loi de $X_t - X_0$, on note $\mu_t = P^{X_t - X_0}$. Celui-ci "caractérise" un PAIS: on parlera ainsi d'un "PAIS de taux de transition $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$".

Définition 1.2 *Un mouvement brownien réel standard $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que*
(c') ses trajectoires sont continues;
(e) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t > 0$: $\mu_t(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$. En particulier, $\mathbf{E}(B_t) = 0$ et $var(B_t) = t$ pour tout $t \geq 0$.

Sauf précision expresse du contraire un "mouvement brownien" désignera un "mouvement brownien réel standard". Nous renvoyons à la définition 1.21 pour une définition plus large du mouvement brownien.

Définition 1.3 *Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ de paramètre/intensité $\lambda > 0$ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que*
(e') $\mu_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ pour tout $t > 0$: $\mathbf{P}(N_t = n) = \mu_t(n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. En particulier, $\mathbf{E}(N_t) = \lambda t$ et $var(N_t) = t$ pour tout $t \geq 0$.

Voici maintenant quelques précisions concernant les notions utilisées dans la définition 1.2.

Définition 1.4 (naïve d'un processus) *Pour le moment, un processus est juste une famille $X = (X_t)$ indexée par $t \in \mathbb{T}$ de v.a. à valeurs dans un espace mesurable d'états $(E, \mathcal{E})$. On supposera dans ce cours $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$, (mais on pourrait prendre $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, et même $\mathbb{T} = \mathbb{R}^d$ dans le cas d'un processus de Poisson "spatial"). On supposera également $E = \mathbb{R}^d$ (mouvement Brownien) ou $E = \mathbb{N}$ (processus de Poisson). On a donc $X : \mathbb{T} \times \Omega \to E$ avec $X_t : \Omega \to E$ mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Définition & Proposition 1.5 *Un processus stochatique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est à accroissements indépendants (PAI) si*

$$\forall\, t_1 < \dots < t_k \qquad X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \text{ sont indépendants,} \tag{1.1}$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall\, s < t \qquad X_t - X_s \text{ est indépendant de la tribu canonique } \mathcal{F}_s^X := \sigma((X_u)_{u \le s}). \tag{1.2}$$

Preuve de l'équivalence entre (1.1) et (1.2). D'après le théorème de classes monotones, l'assertion (1.2) est équivalent à

$$\forall\, t_1 < \dots < t_k \qquad X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \text{ est indépendant de la tribu } \sigma\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{k-1}}\},$$

ou formulé plus explicitement

$$\mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\, g(X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}})) = \mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}))\, \mathbf{E}(g(X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}))$$

pour toutes fonctions de $f, g \in L^0_+$. En introduisant la fonction $h(y_1, \dots, y_{k-1}) = g(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_{k-1})$ on en déduit que (1.2) est équivalent à

$$\mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\, h(X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})) = \mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}))\, \mathbf{E}(h(X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}))$$

pour toutes fonctions de $f, h \in L^0_+$. En utilisant la densité des fonctions tensorisées $h(y_1, \dots, y_{k-1}) = h_1(y_1) \dots h_{k-1}(y_{k-1})$ (ou la densité des fonctions du type $e^{\lambda \cdot X}$ ou un argument de classe monotone ...) on obtient que (1.2) est équivalent à

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\, h_1(X_{t_1}) \dots h_{k-1}(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})) \\ = \mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}))\, \mathbf{E}(h_1(X_{t_1}) \dots h_{k-1}(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}))\end{aligned}$$

pour toutes fonctions $f, h_1, \dots, h_{k-1} \in L^0_+$. En itérant cette identité, on voit que cela est équivalent à

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\, h_1(X_{t_1}) \dots h_{k-1}(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})) \\ = \mathbf{E}(f(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}))\, \mathbf{E}(h_1(X_{t_1})) \dots \mathbf{E}(h_{k-1}(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})),\end{aligned}$$

ce qui est précisémment (1.2). ◻

Définition 1.6 *Un processus stochatique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est à accroissements stationnaires (PAS) si*

$$\forall\, t \in \mathbb{T},\ \forall\, h > 0 \qquad \text{la loi de } X_{t+h} - X_t \text{ ne dépend pas de } t.$$

Plus précisément, il existe une famille (μ_h) de lois de probabilité sur E telle que pour tout $t, h \ge 0$ et toute fonction $\phi \in L^0_+$ on a

$$\mathbf{E}(\phi(X_{t+h} - X_t)) = \int_E \phi(y)\, \mu_h(dy).$$

Remarque 1.7 *Attention, il ne faut pas confondre un processus stochatique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ à accroissements stationnaires avec*
- un "processus stationnaire", ce qui signifie que pour tout $T, t_1, \dots, t_n$ la loi de $(X_{t_1+T}, \dots, X_{t_n+T})$ ne dépend pas de T;
- un "processus stationnaire du second ordre", ce qui signifie que $\mathbf{E} X_t^2 < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ et la fonction de covariance $K(t,s) := \mathbf{E}[(X_t - \mathbf{E}X_t)\,(X_s - \mathbf{E}X_s)]$ est (seulement) une fonction de $t - s$ pour tout $t, s \in \mathbb{T}$.

Définition 1.8 *Etant donné un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, pour tout $\omega \in \Omega$ fixe, la fonction $X(\cdot,\omega) : \mathbb{T} \to E$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est appellée une trajectoire de X (correspondant à l'aléa ω).*
On dit qu'un processus stochatique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est
- à trajectoires continues si:

$$\forall\,\omega \in \Omega \quad \textit{l'application } \mathbb{T} \to E,\ t \mapsto X_t(\omega) \textit{ est continue,}$$

- à trajectoires continues à droite (càd) si:

$$\forall\,\omega \in \Omega,\ \forall\,t \in \mathbb{T} \quad X_t(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} X_{t+\varepsilon}(\omega),$$

- à trajectoires admettant des limites à gauches (làg) si:

$$\forall\,\omega \in \Omega,\ \forall\,t \in \mathbb{T},\ \exists\,\ell_{t,\omega} \quad \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon<0} X_{t+\varepsilon}(\omega) = \ell_{t,\omega}.$$

Comme cela ne porte pas à ambiguïté, on omettra souvent de préciser "à trajectoires": on dira simplement que X est un processus continu, càd, làg ou càdlàg.

Définition 1.9 *On dit qu'un vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ suit une loi gaussienne centrée et de variance $\sigma > 0$, on note $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$, ou pour être plus précis $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma\,I)$, si*

$$P^Y(dy) = g_\sigma(y)\,dy, \qquad g_\sigma(y) := \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2\sigma}}}{(2\,\pi\sigma)^{d/2}}.$$

Le but de ce chapitre est d'étudier parallèlement quelques propriétés du mouvement Brownien et des processus à accroissements stationnaires et indépendants à trajectoires continues à droite (PAIScàd). Ceux-ci forment une classe plus vaste puisqu'elle contient, entre autres, le mouvement Brownien, les processus de Poisson (étudiés au chapitre 3) mais également les marches aléatoires et les processus de Lévy. L'intérêt de cette étude simulatannée est d'une part de bien faire ressortir dans les propriétés du mouvement brownien ce qui est conséquence de son caractère PAIScàd et ce qui est conséquence de son caractère plus spécifique "gaussien" et/ou "à trajectoires continues", et d'autre part, de pouvoir utiliser les résultats obtenus ici lors de l'étude des processus de Poisson dans les prochains chapitres.

1.2 Martingales remarquables et propriétés de Markov d'un PAIScàd.

Définition 1.10 *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est sommable (ou intégrable) si $\mathbf{E}(|X_t|) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, on note $X \in L^1$. Dans la suite,* **tous les processus seront sommables***, et on oubliera donc souvent de le préciser. On dit qu'un processus est centré si $\mathbf{E}(X_t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{T}$. On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est de carré sommable si $\mathbf{E}(|X_t|^2) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, on note $X \in L^2$.*

Lemme 1.11 *Soit X un PAIScàd de carré sommable. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$ tels que*

$$\forall\,t \geq 0 \qquad \mathbf{E}(X_t - X_0) = \lambda\,t, \quad var(X_t - X_0) = \sigma\,t.$$

Preuve du Lemme 1.11. En effet, montrons par exemple la première identité, et on peut supposer $X_0 = 0$ (sinon le translaté $X_t - X_0$ est encore un PAIScàd). Pour $t = p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$E(X_p) = E(X_p - X_{p-1}) + ... + E(X_1) = p\,E(X_1), \quad E(X_1) = E(X_1 - X_{1-1/q}) + ... + E(X_{1/q}) = q\,E(X_{1/q}),$$

d'où on déduit $E(X_t) = t\,E(X_1)$ pour tout $t \in \mathbb{Q}^+$, puis pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par l'hypothèse de continuité à droite. De même, en posant $Y_t = X_t - EX_t$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E(Y_p^2) &= E((Y_p - Y_{p-1})^2) + 2\,E(Y_p - Y_{p-1})\,E(Y_{p-1}) + E((Y_{p-1})^2) \\ &= E((Y_p - Y_{p-1})^2) + ... + E((Y_1)^2) = p\,E((Y_1)^2), \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment. $\square$

Les martingales constituent une classe très importante de processus car elles possèdent des propriétés de régularités locales (voir notamment la section consacrée aux "inégalités maximales de Doob") et de comportement asymptotique (voir le cours de "processus discrets") tout à fait remarquables, qui en font un outil puissant.

Définition 1.12 *Soit X un processus et $(\mathcal{F}_t^X)$ sa filtration canonique. Un processus stochatique $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathcal{F}^X$-martingale si (M_t est sommable, $\mathcal{F}_t^X$-mesurable/adapté et)*

$$\forall\, t \geq s \qquad \mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s^X) = M_s.$$

Lorsque M est une $\mathcal{F}^M$-martingale, on dira juste que M est une martingale.

Commençons par un résultat "très général", puisqu'il ne repose que sur la seule propriété d'accroissements indépendants.

Proposition 1.13 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un PAI.*
(i) - Si $(X_t) \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors le processus $M_t := X_t - \mathbf{E}X_t$ est une martingale centrée; en particulier B_t est une martingale.
(ii) - Si $X_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$, alors le processus $M_t^2 - E(M_t^2)$ est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale centrée;
(iii) - Si $e^{u\,X_t} \in L^1$, pour tout $t \geq 0$ et un certain $u \in \mathbb{R}$, alors le processus $e^{z\,X_t}/\mathbf{E}(e^{z\,X_t})$ est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re e\, z = u$.

Exercice 1.14 *Appliquer la proposition 1.13 aux processus de Poisson et Brownien.*

- En particulier, B_t, $B_t^2 - t$, $e^{u\,B_t}\,e^{-u^2\,t/2}$ et $e^{i\,u\,B_t}\,e^{u^2\,t/2}$ sont des $\mathcal{F}_t^B$-martingales pour tout $u \in \mathbb{R}$.
- En particulier, $N_t - \lambda\, t$, $(N_t - \lambda\, t)^2 - \lambda\, t$, $a^{N_t}\,e^{-a\,t}$ sont des $\mathcal{F}_t^N$-martingales pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Preuve de la Proposition 1.13. (i) - On a en effet

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s^M) &= \mathbf{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s^X) + \mathbf{E}(X_s|\mathcal{F}_s^X) - \mathbf{E}X_t \\ &= \mathbf{E}(X_t - X_s) + X_s - \mathbf{E}X_t = X_s,\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{F}_t^M = \mathcal{F}_t^X$.
(ii) - Pour tout $t > s$, on a d'une part puisque M_t est centrée

$$\begin{aligned}E(M_t^2|\mathcal{F}_s^X) &= E((M_t - M_s + M_s)^2|\mathcal{F}_s^X) \\ &= E((M_t - M_s)^2) + 2\,(E(M_t - M_s))\,M_s + M_s^2 \\ &= E((M_t - M_s)^2) + M_s^2,\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}E(M_t^2) &= E((M_t - M_s)^2) + 2\,(E(M_t - M_s))\,E(M_s) + E(M_s^2) \\ &= E((M_t - M_s)^2) + E(M_s^2).\end{aligned}$$

On conclut en prenant la différence de ces deux identités et en remarquant que $E(M_t^2) = E(B_t^2) = t$ lorsque $X = B$.
(iii) - Pour tout $t > s$, on a d'autre part,

$$E(e^{uX_t}|\mathcal{F}_s^X) \;=\; E(e^{u(X_t - X_s)}\;e^{uX_s}|\mathcal{F}_s^X) \;=\; E(e^{u(X_t-X_s)})\;e^{uX_s},$$

et de la même façon

$$E(e^{uX_t}) = E(e^{u(X_t-X_s)}\ e^{uX_s}) = E(e^{u(X_t-X_s)})\,E(e^{uX_s}).$$

On conclut en prenant le quotient de ces deux identités et en remarquant que $E(e^{uB_t}) = e^{u^2 t/2}$ lorsque $X = B$. ◻

Les processus de Lévy (resp. les PAIScàd) jouissent d'une version *"particulièrement agréable et puissante"* de la propriété de Markov qui affime qu'un processus de Lévy (resp. un PAIScàd) *"renaît tout neuf de ses temps d'arrêt"*. Nous donnons dès à présent un premier résultat qui correspond à un *"temps d'arrêt déterministe"* (et qui ne nécessite pas d'hypothèse de régularité). Ce résultat sera généralisé ultérieurement à un temps d'arrêt aléatoire (Théorème 3.14).

Théorème 1.15 *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus et $T \in \mathbb{T}$ un temps fixe. On définit le processus $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ par $Y_t := X_{t+T} - X_T$, $\forall\, t \in \mathbb{T}$.*
- Si X est un PAI alors Y est un PAI de même taux de transition.
- Si X est un PAS alors Y est un PAS indépendant de $\mathcal{F}^X_T$.
- La régularité des trajectoires de Y est la même que celle des trajectoires de X.
En particulier, si X est un processus de Lévy (resp. un PAIScàd) alors Y est un processus de Lévy (resp. un PAIScàd) de même taux de transition que X et indépendant de $\mathcal{F}^X_T$.

Preuve du Théorème 1.15. Le caractère stationnaire des accroissements résulte de

$$Y_t - Y_s \;=\; X_{T+t} - X_{T+s} \;\sim\; X_{t-s} - X_0 \;\sim\; \mu_{t-s}.$$

D'une part, pour une suite de temps $t_1 < ... < t_k$ et des fonctions boréliennes positives $f_1, \ldots , f_k$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(f_1(Y_{t_1})\, f_2(Y_{t_2} - Y_{t_1}) \ldots. f_k(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})) = \\
&\quad = \mathbf{E}(f_1(X_{t_1+T} - X_T)\, f_2(X_{t_2+T} - X_{t_1+T}) \ldots. f_k(X_{t_k+T} - X_{t_{k-1}+T})) \\
&\quad = \mathbf{E}(f_1(X_{t_1+T} - X_T))\, \mathbf{E}(f_2(X_{t_2+T} - X_{t_1+T})) \ldots. \mathbf{E}(f_k(X_{t_k+T} - X_{t_{k-1}+T})) \\
&\quad = \mathbf{E}(f_1(Y_{t_1}))\, \mathbf{E}(f_2(Y_{t_2} - Y_{t_1})) \ldots. \mathbf{E}(f_k(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})),
\end{aligned}$$

ce qui démontre que Y est à accroissements indépendants. D'autre part, pour Z une va positive $\mathcal{F}_T$-mesurable, $0 \le t_1 < ... < t_k$ une suite de temps et F une fonction borélienne positive, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z\, F(Y_{t_1}, ..., Y_{t_k})) &= \mathbf{E}(Z\, F(X_{t_1+T} - X_T, ..., X_{t_k+T} - X_T)) \\
&= \mathbf{E}(Z)\, \mathbf{E}(F(X_{t_1+T} - X_T, ..., X_{t_k+T} - X_T)) \\
&= \mathbf{E}(Z)\, \mathbf{E}(F(Y_{t_1}, ..., Y_{t_k})),
\end{aligned}$$

ce qui démontre que Y est indépendant de la tribu $\mathcal{F}^X_T$. ◻

1.3 Mouvement brownien et processus gaussiens.

Nous donnons maintenant plusieurs autres caractérisations d'un mouvement brownien qui reposent sur son caractère "gaussien".

Définition 1.16 *On appelle "loi d'un processus" stochatique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la "famille des lois marginales de dimension finie", c'est-à-dire, la famille des lois μ^J des vecteurs $X^J := (X_t)_{t\in J}$ lorsque J parcours $\mathscr{P}_f(\mathbb{T})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{T}$. En d'autres termes, $J = \{t_1, ..., t_k\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{T}$, $t_1 < ... < t_k$ et $X^J = (X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ est une va à valeurs dans E^J et de loi μ^J.*
- On dit que deux processus X et Y ont même loi, on note $X \sim Y$, si $X^J \sim Y^J$ pour tout $J \subset \mathcal{P}_f(\mathbb{T})$. Attention, **cela ne signifie pas que** $X = Y$.

Définition 1.17 *Un processus stochatique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est gaussien si ses lois marginales de dimension finie sont des vecteurs gaussiens. Un processus stochatique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est donc gaussien si*

$$\forall\, t_1 < \ldots < t_k \quad \text{le vecteur} \quad (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \quad \text{est gaussien},$$

c'est-à-dire si

$$\forall\, t_j \in \mathbb{T},\ \forall\, u_j \in \mathbb{R} \quad \text{la va} \quad \sum u_j\, X_{t_j} \quad \text{est gaussiennne.}$$

Voici plusieurs autres caractérisations d'un mouvement brownien.

Proposition 1.18 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus réel continu tel que $X_0 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) X est un mouvement brownien;
(ii) X est un processus gaussien centré et de covariance

$$\mathbf{E}(X_t\, X_s) = \min(s,t) = s \wedge t \qquad \forall\, s,t \geq 0;$$

(iii) les marginales de X satisfont: $\forall\, t_1, \ldots, t_n$, $0 = t_0 \leq t_1 < \ldots < t_n$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim \mathcal{N}(0, A), \qquad A_{jk} = (t_k - t_{k-1})\, \delta_{jk};$$

(iv) pour tout $t_1, \ldots, t_n$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ et toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$,

$$\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \ldots f_n(X_{t_n})) = \int_{\mathbb{R}^{nd}} f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, g_{t_1}(x_1) \ldots g_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n;$$

(v) pour tout $u \in \mathbb{R}$ le processus $e^{i\,u\cdot X_t}\, e^{|u|^2\, t/2}$ est une martingale.

Preuve de la Proposition 1.18. *(i) $\Longrightarrow$ (ii).* X est alors un processus centré et gaussien puisque pour tout $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$

$$\sum u_i\, X_{t_i} = \sum v_i\, (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + v_1\, X_{t_1}$$

est une va gaussienne comme somme de va gaussiennes indépendantes, et si $t > s \geq 0$

$$E(X_t\, X_s) = E(X_t - X_s)\, E(X_s) + E(X_s^2) = s.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). La loi d'un processus gaussien est défini par sa moyenne et sa covariance qui viennent d'être identifiés. Plus précisément, le vecteur $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$, $Y_j := X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$, est gaussien centré, de matrice de covariance $A_{jk} = (t_j - t_{j-1})\, \delta_{jk}$ puisque

$$\mathbf{E}(Y_i^2) = \mathbf{E}(X_{t_j}^2) - 2\, \mathbf{E}(X_{t_j}\, X_{t_{j-1}}) + \mathbf{E}(X_{t_{j-1}}^2) = t_j - 2\, t_{j-1} + t_{j-1} = t_j - t_{j-1},$$

et pour $j > k$

$$\mathbf{E}(Y_j\, Y_k) = \mathbf{E}[X_{t_j}\, X_{t_k} - X_{t_j}\, X_{t_{k-1}} - X_{t_{j-1}}\, X_{t_k} + X_{t_{j-1}}\, X_{t_{k-1}}] = t_k - t_{k-1} - t_k + t_{k-1} = 0.$$

Cela implique bien $Y \sim \mathcal{N}(0, A)$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). Il suffit d'une part de remarquer que pour tout $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ et puisque $(X_{t+h} - X_t, X_t)$ est un vecteur gaussien de loi connue

$$\mathbf{E}(\phi(X_{t+h} - X_t)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y_2)\, g_t(dy_1)\, g_h(dy_2)\, dy_1 dy_2 = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, g_h(dy)\, dy$$

ce qui signifie bien que X_t est un PAS de taux de transition la loi $g_h(x)\,dx$. D'autre part, pour tout $\phi_1, ..., \phi_n \in C_b(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\phi_1(X_{t_1}) \dots \phi_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y_1) \dots \phi_n(y_n)\, g_{t_1}(y_1) \dots g_{t_n - t_{n-1}}(y_n)\, dy_1 \dots dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi_1(y_1)\, g_{t_1}(y_1)\, dy_1 \dots \int_{\mathbb{R}} \phi_n(y_n)\, g_{t_n - t_{n-1}}(y_n)\, dy_n \\
&= \mathbf{E}(\phi_1(X_{t_1})) \dots \mathbf{E}(\phi_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})),
\end{aligned}$$

ce qui signifie que (X_t) est un PAI.

(iii) $\Longleftrightarrow$ *(iv).* Cela résulte d'un changement de variables. Partant de (iii), on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})] &= \mathbf{E}[\phi(X_{t_1}, X_{t_1} + (X_{t_2} - X_{t_1}), ..., X_{t_1} + ... + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}))] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y_1, ..., y_1 + ... + y_n)\, g_{t_1}(y_1) \dots g_{t_n - t_{n-1}}(y_n)\, dy_1 ... dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, x_2, ..., x_n) \prod_{k=1}^{n} g_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})\, dx_k
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $(y_1, ..., y_n) \to (x_1, ..., x_n)$, $x_k = y_1 + ... + y_k$ (de sorte que $y_k = x_k - x_{k-1}$). inversement, par densité, de (iv) on déduit

$$\mathbf{E}(\phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, ..., x_n) \prod_{k=1}^{n} g_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})\, dx_k,$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\psi(X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, ..., x_n - x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n} g_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})\, dx_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y_1, ..., y - n) \prod_{k=1}^{n} g_{t_k - t_{k-1}}(y_k)\, dy_k,
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $(x_1, ..., x_n) \to (y_1, ..., y_n)$, $y_k = x_k - x_{k-1}$, ce qui est précisément (iii).

(i) $\Longrightarrow$ *(iv).* Cela a déjà été démontré dans la Proposition 1.13.

(v) $\Longrightarrow$ *(iii).* L'hypothèse s'écrit $\mathbf{E}(e^{i\,u\,(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s^X) = e^{-u^2\,(t-s)/2}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, $s < t \in \mathbb{T}$. On écrit pour $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}$ et $t_1 < ... < t_k \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(e^{i\,u_k\,(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})}\, e^{i\,u_{k-1}\,(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})} \dots e^{i\,u_1\,(X_{t_1})}\right) \\
&\quad = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(e^{i\,u_k\,(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}^X\right) e^{i\,u_{k-1}\,(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})} \dots e^{i\,u_1\,(X_{t_1})}\right) \\
&\quad = \mathbf{E}\left(e^{i\,u_{k-1}\,(X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})} \dots e^{i\,u_1\,(X_{t_1})}\right) e^{-u_k^2\,(t_k - t_{k-1})/2} \\
&\quad = \quad .\ .\ .\ . \\
&\quad = e^{-u_k^2\,(t_k - t_{k-1})/2}\, e^{-u_k^2\,(t_{k-1} - t_{k-2})/2} \dots e^{-u_1^2\,t_1/2}.
\end{aligned}$$

On en conclut que $(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}, \dots, X_{t_1})$ suit une loi $\mathcal{N}(0, A)$ puisque un vecteur aléatoire est caractérisé par sa transformée de Fourier. ◫

Proposition 1.19 *Si B est un mouvement brownien, il en est de même pour*

1. $X_t := a^{-1}\, B_{a^2\,t}$ pour tout $a \neq 0$;
2. $X_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$, $t_0 > 0$;
3. $X_t := B_{T-t} - B_T$, $t \in [0, T]$; $T > 0$.

Preuve de la Proposition 1.19. Le résultat découle de la caractérisation d'un mouvement Brownien en terme de processus gaussien. ◫

Proposition 1.20 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, ..., X_t^d)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors X est un mouvement brownien si, et seulement si,*
(i) X^k est un mouvement brownien réel pour tout $k = 1, ..., d$;
(ii) les processus X^1, ..., X^d sont indépendants.

Preuve de la Proposition 1.20. En revenant à la définition du mouvement brownien, il est clair (i) et (ii) implique que X est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Il reste à démontrer que si X est un mouvement brownien alors les processus X^1, ..., X^d sont indépendants. Or on a pour $j \neq k$, $u, v \in \mathbb{R}$ et disons $s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j}\,e^{i\,v\,X_t^k}) &= \mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j + i\,v\,X_s^k}\,e^{i\,v\,(X_t^k - X_s^k)}) \\
&= \mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j + i\,v\,X_s^k})\,\mathbf{E}(e^{i\,v\,(X_t^k - X_s^k)}) \qquad (X \text{ est un PAI}) \\
&= \mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j})\,\mathbf{E}(e^{i\,v\,X_s^k})\,\mathbf{E}(e^{i\,v\,(X_t^k - X_s^k)}) \qquad (X_s \sim \mathcal{N}_d(0,1) \Rightarrow X_s^j \perp\!\!\!\perp X_s^k) \\
&= \mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j})\,\mathbf{E}(e^{i\,v\,X_s^k}\,e^{i\,v\,(X_t^k - X_s^k)}) \qquad (X \text{ est un PAI}) \\
&= \mathbf{E}(e^{i\,u\,X_s^j})\,\mathbf{E}(e^{i\,v\,X_t^k}),
\end{aligned}$$

et on conclut par un argument de densité. ◫

Définition 1.21 *On appelle parfois mouvement brownien (général) de condition initiale X_0, de dérive μ et d'écart type σ un processus continu X à accroissements stationnaires et indépendants et tel que*

$$X_t - X_0 \sim \mathcal{N}_d(\mu\,t, \sigma\,I).$$

On passe d'un mouvement brownien B (standard issu de 0) à un mouvement brownien (général) en considérant une va X_0 indépendante de B, une dérive $\mu \in \mathbb{R}$ et un écart type $\sigma > 0$ et en introduisant le processus $X_t := B_{\sigma t} + \mu\,t + X_0$.

Exercice 1.22 *[Dur2, page 245]*
a) Montrer que $X_t := B_t - t\,B_1$, $0 \leq t \leq 1$, (pont brownien) et $Y_t := (\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}|B_1 = 0)$ sont des processus gaussiens de moyenne nulle et de variance $s\,(1-t)$.
b) Etudier $Z_t := e^{-t}\,B_{e^{2t}}$.

Il est possible de développer directement (sans lire les sections 2, 3, 4) le calcul stochastique brownien. Le seul résultat nécessaire est *l'inégalité maximale de Doob* présentée dans la section 6 et qui permet de démontrer la continuité de l'intégrale stochastique. Ce résultat peut être omis en première lecture.

Nous allons présenter dans la suite de ce chapitre trois propriétés remarquables
- la loi du tout ou rien;
- la propriété de Markov forte;
- le théorèmes d'arrêt (ou échantillonage) et des inégalités maximales de Doob.

Pour formuler ces résultats nous allons avoir besoin de la notion de *filtration*, de *temps d'arrêt* et enfin de *(sous-)martingales.*

2 Loi du 0-1 et applications

Pour aller un peu plus loin nous allons avoir besoin de la notion de *filtration*, ce qui va nous permettre de généraliser la notion de *Martingale*, et de la notion de *temps d'arrêt*, ce qui va nous permettre d'énoncer la *propriété de Markov forte.*

2.1 Théorème du "tout ou rien" ou loi du 0-1 de Blumenthal

Théorème 2.1 (Loi 0-1 de Blumenthal) *Soit $(X_t)_{t>0}$ un PAIcàd tel que $X_0 = 0$. Alors $\mathcal{F}_{0+}^X$ est triviale: pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$ on a $\mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$, où on a posé*

$$\mathcal{F}_{0+}^X := \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s^X = \bigcap_{s>0,\, s\in\mathbb{Q}} \mathcal{F}_s^X.$$

Preuve du théorème 2.1. Par définition on a $X_s - X_\varepsilon \perp \mathcal{F}_\varepsilon$ pour tout $s > \varepsilon > 0$, donc $X_s - X_\varepsilon \perp \mathcal{F}_{0+}$ (puisque $\mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$). Par un lemme du chapitre 0 (qui résulte du théorème de la classe monotone) on en déduit $\mathcal{B}_t := \sigma(X_s - X_u;\ 0 < u < s \leq t)$ est indépedant de $\mathcal{F}_{0+}$. Or comme par hypothèse $X_s = X_s - X_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}(X_s - X_\varepsilon)$, la fonction X_s est $\mathcal{B}_t$-mesurable (comme limite de fonctions $\mathcal{B}_t$-mesurables), et donc $\mathcal{B}_t = \mathcal{F}_t$. On a donc démontré $\mathcal{F}_t \perp \mathcal{F}_{0+}$, et encore une fois l'inclusion $\mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_t$ implique $\mathcal{F}_{0+} \perp \mathcal{F}_{0+}$. Cela implique immédiatement que $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale. ◫

2.2 Application du théorème du "tout ou rien".

Théorème 2.2 (Visites) *(i) On a p.s. pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{0\leq s\leq\varepsilon} B_s > 0, \qquad \inf_{0\leq s\leq\varepsilon} B_s < 0.$$

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a = \inf\{t, B_t = a\}$ ($\inf\emptyset = \infty$). Alors

$$p.s., \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad T_a < \infty.$$

(iii) En conséquence, p.s.

$$\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty, \qquad \liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty.$$

Preuve du théorème 2.2. Par symétrie ($-B \sim B$) on peut ne traiter que le "cas positif".
(i) Considérons l'événement

$$A := \bigcap_n \{ \sup_{0\leq s\leq 1/n} B_s > 0\}.$$

Alors d'une part A est clairement $\mathcal{F}_{0+}$-mesurable, et d'autre part

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{ \sup_{0\leq s\leq 1/n} B_s > 0\}) \geq \frac{1}{2}$$

puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}(\{ \sup_{0\leq s\leq 1/n} B_s > 0\}) \geq \mathbf{P}(\{B_{1/n} > 0\}) = \frac{1}{2}.$$

Le théoème 2.1 permet de conclure que $\mathbf{P}(A) = 1$ et donc (i) est démontré.
(ii) De (i) et de la propriété de changement d'échelle de la Proposition 1.19, on tire que pour tout $a > 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{P}[\sup_{s\geq 0} B_s > 0\,] = \lim_{\delta\searrow 0} \mathbf{P}[\sup_{s\geq 0} B_s \geq a\,\delta\,] \\ &= \lim_{\delta\searrow 0} \mathbf{P}[\sup_{s\geq 0}\, \delta\, B_{\delta^{-2}s} \geq a\,\delta\,] = \lim_{\delta\searrow 0} \mathbf{P}[\sup_{t\geq 0} B_t \geq a] = \mathbf{P}[\sup_{t\geq 0} B_t \geq a]. \end{aligned}$$

Par continuité de la trajectoire cela implique que p.s. il existe $T_a \in \mathbb{R}_+$ tel que $B_{T_a} = a$, en particulier $T_a < \infty$.
(iii) se déduit du fait que $\{\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty\} = \lim_{n\to\infty}\{T_n < \infty\}$. ◫

Corollaire 2.3 *B_t n'est monotone sur aucun intervalle.*

Corollaire 2.4 *B_t est récurrent.*

3 Filtration, temps d'arrêt et propriété de Markov forte.

Dans la suite on va souvent supposer que les processus considérés sont càd. Cette hypothèse (peu restrictive) permet de montrer qu'un processus adapté est mesurable par rapports aux deux variables (t, ω) et par rapport à la tribu progressive ... . Cette seule hypothèse permettrait également de développer la théorie des tda, martingales, ...

3.1 Filtration et processus adapté.

Définition 3.1 *Une filtration sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus alors $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_u,\, 0 \le u \le t)$ est une filtration, appellée filtration canonique.*

Remarque 3.2 *Une filtration représente la quantité d'information connue à chaque instant.*

Définition 3.3 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration. Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Remarque 3.4 *Un processus X est adapté à la filtration canonique $\mathcal{F}^X$, et celle-ci est la plus petite filtration $\mathcal{F}$ qui fait de X un processus $\mathcal{F}$-adapté.*

Une question naturelle se pose: pourquoi se compliquer la vie en prenant une filtration différente de la filtration $\sigma(B_s,\, 0 \le s \le t)$? Il y a trois réponse à cela.

1. Cela permet de considérer simultanément plusieurs processus, et de définir les notions de temps d'arrêt, de martingale, ... par rapport à l'information contenue dans l'ensemble de ...

2. On souhaite que la filtration $\mathcal{F}$ satisfasse la propriété suivante:

$$A \in \mathscr{A} \text{ et } \mathbf{P}(A) = 0 \quad \text{implique} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}\ A \in \mathcal{F}_t.$$

Ceci exprime que $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathscr{A}$. Le but de cette hypothèse est de pouvoir affirmer que si $X = Y$ $\mathbf{P}$ p.s. et que Y est $\mathcal{F}_t$-mesurable alors X est également $\mathcal{F}_t$-mesurable. En particulier, cela permet d'affirmer que si (X_n) est une suite de processus adaptés à une filtration $\mathcal{F}$ qui est de Cauchy, au sens de la norme $L^2(\Omega)$ par exemple, alors (X_n) converge vers une limite X dans $L^2(\Omega)$, et X est encore un processus adapté! Cette hypothèse est fondamentale pour construire l'intégrale stochastique. Afin de s'assurer que $\mathcal{F}$ satisfasse cette propriété, il suffit de prendre

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s;\, s \le t) \vee \sigma(\mathcal{N}),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des ensembles négligeables de $\mathscr{A}$ (où donc $\mathscr{A}$ est une tribu supposée complète). NON. Le problème est plutôt au niveau des propriétés de continuité des trajectoires. On a besoin de X continue ou càd pour que les temps d'atteintes soient des tda. Or pour construire des processus càd on utilise l'inégalité de Doob faisant intervenir des temps "postérieurs", ce qui implique qu'on arrive à démontrer la continuité que sur un ensemble $\Omega\backslash N$ avec $N \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathbf{P}(N) = 0$. Il faut donc adjoindre à $\mathcal{F}_t$ au minimum les négligeables de $\mathcal{F}_\infty$ (mais là encore, pas besoin de compléter la tribu!).

3. Une dernière propriété agréable est que $\mathcal{F}$ satisfasse:

$$\mathcal{F} \text{ est continue à droite (càd):} \quad \forall\, t \ge 0, \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Cette propriété permet d'avoir $\forall\, t > 0$ $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ si, et seulement si, $\forall\, t > 0$ $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Elle permet également de montrer le théorème d'arrêt (ou d'échantillonnage) pour les martingales (sans supposer de régularité sur celles-ci).

3.2 Temps d'arrêt.

Définition 3.5 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ une filtration. Un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}$, on dira un $\mathcal{F}$-tda, est une application $T : \Omega \to [0, +\infty]$ telle que $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \ge 0$.*

Remarque 3.6 - *Si T est un tda alors*

$$\forall\, t > 0 \qquad \{T < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\, q<t} \{T \le q\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.1}$$

- Si T est un tda alors $\{T \ge t\}$, $\{T > t\} \in \mathcal{F}_t$.
- Si T satisfait (3.1) alors T n'est pas nécessairement un tda. On a seulement

$$\forall\, t \ge 0 \qquad \{T \le t\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q},\, q>t} \{T < q\} \in \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Ainsi, si $\mathcal{F}$ est càd on a : T est un tda si, et seulement si, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \ge 0$.

Lemme 3.7 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration et T un $\mathcal{F}$-tda. Il existe une suite (T_n) de $\mathcal{F}$-tda telle que T_n est à valeurs dans $\{k\, 2^{-n};\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$ et $T_n \searrow T$. De plus, si T est fini ps alors (T_n) aussi*

Preuve du Lemme 3.7. Il suffit de poser

$$T_n(\omega) = k\, 2^{-n} \quad \text{si} \quad (k-1)\, 2^{-n} \le T < k\, 2^{-n}.$$

En effet, pour tout $t \ge 0$, en définissant $t_n := [2^n\, t]\, 2^{-n} \le t$, on a

$$\{T_n \le t\} = \{T_n \le t_n\} = \{T < t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n} \subset \mathcal{F}_t.$$

◫

Exemples 3.8 *1. Une va T constante est un tda;*

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction T_a définie dans le Théorème 2.2 est un tda (voir lemme 3.9);

3. On peut monter que $T := \sup\{s \le 1, B_s = 0\}$ n'est pas un tda (voir ?).

Lemme 3.9 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $T_a : \Omega \to [0, \infty]$ définie par $T_a(\omega) := \inf\{s;\, B_s(\omega) = a\}$ est une va et un $\mathcal{F}^B$-tda p.s. fini.*

Preuve du Lemme 3.9. En effet, puisque $B_0 = 0$ et B_s est continue (si B_s est continu $\forall\, \omega$), on a

$$\inf\{s;\, B_s = a\} \le t \;\Leftrightarrow\; \exists\, s \in [0,t]\;\; B_s = a \;\Leftrightarrow\; \sup_{s \in [0,t]} B_s \ge a,$$

ce qui implique

$$\{\omega;\; T_a(\omega) \le t\} = \{\omega;\; \sup_{s \in [0,t]} B_s(\omega) \ge a\}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, comme B_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \in [0,t]$, on a $\sup_{s\in[0,t]} B_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et donc $\{T_a \le t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. L'ensemble $\{T_a = \infty\} = \{\sup_{s \ge 0} B_s < a\}$ est également mesurable (pour la tribu $\mathcal{F}^B_\infty \subset \mathscr{A}$) et donc T_a est une va (on peut également remarquer que $\{T_a = \infty\} = \Omega \backslash \cup_n \{T_a \le n\}$). Enfin, le Théorème 2.2 affirme que $T_a < \infty$ ps. ◫

Généralisons un peu ce résultat.

Lemme 3.10 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration, X un processus $\mathcal{F}$-adapté càd à valeurs dans un espace métrique $(E, \mathcal{E})$ de valeur initiale X_0 certaine. Pour un ensemble $A \in \mathcal{E}$ on définit le temps d'atteinte $T_A : \Omega \to [0, \infty]$ par $T_A(\omega) := \inf\{s;\, X_s(\omega) \in A\}$ et on définit le temps de contact $\tilde{T}_A : \Omega \to [0, \infty]$ par $\tilde{T}_A(\omega) := \inf\{s;\, \overline{(X_u(\omega))_{0 \le u \le s}} \cap A \ne \emptyset\}$.*

1 - Si O un ensemble ouvert de E alors T_O est un $\mathcal{F}_{t^+}$-tda.

2 - Si F un ensemble fermé de E et X est càdlàg ou si F est un ensemble compact alors $\tilde{T}_F$ est un $\mathcal{F}$-tda.

3 - En particulier, si F un ensemble fermé de E et X est continu alors $T_F = \tilde{T}_F$ est un $\mathcal{F}$-tda.

Preuve du Lemme 3.10. 1. Grâce à la continuité à droite, on a

$$\{T_O < t\} = \bigcup_{s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in O\},$$

où tous les ensembles sont dans $\mathcal{F}_t$, donc $\{T_O < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ et $\{T_O \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+}$ pour tout $t \geq 0$.
2. Par définition, on a

$$\{\tilde{T}_F \leq t\} \quad = \quad \{d(\,\overline{(X_s(\omega))_{0\leq s\leq t}}\,, F) = 0\},$$

puisque les deux ensembles considérés sont fermés et l'un au moins est compact. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\{\tilde{T}_F \leq t\} &= \{\inf_{s\in[0,t]} d(X_s, F) = 0\} \\ &= \{\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, s \in [0,t]\ \ d(X_s, F) \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{\omega;\ d(X_s(\omega), F) \leq \varepsilon\},\end{aligned}$$

et tous ces ensembles appartiennent à $\mathcal{F}_t$ puisque $\omega \mapsto d(X_s(\omega), F)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable. $\square$

3.3 Variable arrêtée, tribu arrêtée et propriété de Markov forte.

Définition 3.11 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration, $\mathcal{F}_\infty := \vee\mathcal{F}_t$, T un $\mathcal{F}$-tda ps fini et X un processus càd $\mathcal{F}$-adapté. On définit*
- (i) la tribu $\mathcal{F}_T$ des événements antérieurs à T par $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty;\ \forall\, t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$;
- (ii) la va X_T du processus arrété en T par $(X_T)(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$.

Lemme 3.12 *Sous les hypothèses de la définition 3.11 on a*
- (i) $\mathcal{F}_T$ est une tribu, et si S est un autre tda tel que $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$;
- (ii) T est une va $\mathcal{F}_T$-mesurable.
- (iii) X_T est une va $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Preuve du Lemme 3.12. *(i).* Pour montrer que $\mathcal{F}_T$ (ou $\mathcal{F}_S$) est une tribu il suffit d'écrire ce que sont les axiomes d'une tribu! De plus, si $A \in \mathcal{F}_S$ et $S \leq T$ alors

$$\forall\, t \in \mathbb{T} \qquad A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t,$$

de sorte que $A \in \mathcal{F}_T$, et donc $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
(ii). Montrer que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable revient juste à dire que $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, or cela est clair d'après la définition de $\mathcal{F}_T$ puisque $\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_t\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$.
(iii). Soit (T_n) la suite de tda construite au Lemme 3.9 telle que $T_n \searrow T$. Nous allons montrer successivement que $X_{T_n\wedge t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, $X_{T\wedge t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable puis X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Pour tout $t \geq 0$ et en introduisant les notations $t_n := [2^n\, t]\, 2^{-n}$, $t_n^k := k\, 2^{-n}$, on a

$$\begin{aligned}X_{T_n\wedge t} &= X_{T_n}\,\mathbf{1}_{T_n\leq t} + X_t\,\mathbf{1}_{T_n>t} = \sum_{k,\,t_n^k\leq t_n} X_{T_n}\,\mathbf{1}_{T_n=t_n^k} + X_t\,\mathbf{1}_{T_n>t_n} \\ &= \sum_{k,\,t_n^k\leq t_n} X_{t_n^k}\,\mathbf{1}_{t_n^{k-1}\leq T<t_n^k} + X_t\,\mathbf{1}_{T\geq t_n}\end{aligned}$$

qui est $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurable, donc $\mathcal{F}_t$-mesurable. Comme $T_n \wedge t$ converge en décroissant vers $T \wedge t$ et que (X_s) est càd, on a

$$X_{T\wedge t} = \lim_{n\to\infty} X_{T_n\wedge t},$$

ce qui prouve que $X_{T\wedge t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Enfin, pour tout $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{E}$ on a

$$\{X_T \in A\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T\wedge t} \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ce qui est précisément dire que X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable. ◫

Voici une liste de propriétés concernant les temps d'arrêts à temps continus, dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme 3.13 *On définit*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T &:= \{A \in \mathcal{F}_\infty;\ \forall\, t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\},\\
\mathcal{F}_{T+} &:= \{A \in \mathcal{F}_\infty;\ \forall\, t \geq 0,\ A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\},\\
\mathcal{F}_{T-} &:= \sigma(A \cap \{T > t\};\ \forall\, t \geq 0,\ A \in \mathcal{F}_t\}.
\end{aligned}$$

(1) On a $\mathcal{F}_{T_-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$ et si $(\mathcal{F}_t)$ est càd alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T+}$.

(2) Une va $T : \Omega \to [0,\infty]$ est un $(\mathcal{F}_{t+})$-tda si, et seulement si, $\forall\, t > 0$ $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ ou de manière équivalente, $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.

(3) Si $T = t$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$.

(4) Pour $A \in \mathcal{F}_\infty$, on définit

$$T^A(\Omega) = T(\omega) \ \ si \ \ \omega \in A, \quad T^A(\Omega) = +\infty \ \ si \ \ \omega \notin A.$$

Alors $A \in \mathcal{F}_T$ si, et seulement si, T^A est un tda.

(5) Soit S et T deux tda. Alors $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des tda, de plus, $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, $\{S \leq T\}$ et $\{S = T\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{S\wedge T}$. Enfin, si $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

(6) Si (S_n) est une suite croissante de tda alors $S = \lim S_n$ est un tda et $\mathcal{F}_{S^-} = \vee_n \mathcal{F}_{S_n^-}$.

(7) Si (S_n) est une suite décroissante de tda alors $S = \lim S_n$ est un $\mathcal{F}_{t_+}$-tda et $\mathcal{F}_{S^+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n^+}$.

(8) Si (S_n) est une suite décroissante stationnaire de tda (cela signifie que $\forall\, \omega\ \exists\, N(\omega)$: $\forall\, n \geq N(\omega)$ $S_n(\omega) = S(\omega)$ alors $S = \lim S_n$ est un $\mathcal{F}_t$-tda et $\mathcal{F}_S = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$.

Théorème 3.14 *Un PAIScàd $X = (X_t)$ vérifie la proporiété de "Markov forte pour les PAIS": pour tout tda T p.s. fini le processus $Y = (Y_t)$ défini par $Y_t := X_{t+T} - X_T$ est un PAIScàd de même taux de transition que X et indépendant de la tribu $\mathcal{F}_T^X$.*

Preuve du théorème 3.14. Il s'agit de démontrer que pour tout $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$, toute suite de temps $0 =: t_0 < ... < t_k$ et toute suite de fonction $\phi_k \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathbf{E}(Z\,\phi_1(Y_{t_1}) \dots \phi_k(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})) = \mathbf{E}(Z) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}(\phi_j(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})). \tag{3.2}$$

En effet, il est clair que $Y_t(\omega)$ est càd pour p.t. $\omega \in \Omega$. Le choix $Z = 1$, $k = 2$, $0 < t_1 = s < t_2 = s$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \phi$ quelconque permet de montrer que $\mathbf{E}(\phi(Y_t - Y_s)) = \mathbf{E}(\phi(X_t - X_s)) = \mu_{t-s}(\phi)$ ce qui signifie que Y est à accroissements stationnaires de taux de transition μ_u. Le choix $Z = 1$, et en utilisant à nouveau $\mathbf{E}(\phi(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})) = \mathbf{E}(\phi(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}))$, permet de montrer que Y est à accroissements indépendants. Enfin, le choix de Z quelconque montre que Y_t est indépendant de $\mathcal{F}_T$ pour tout $t > 0$, mais également que $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_k})$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$, et donc par le lemme du chapitre 0 que "$(Y_t)_{t\geq 0}$" (c'est-à-dire: $\sigma(Y_t; t \geq 0)$) est indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Pour montrer (3.2), on observe d'une part puisque X est càd (et avec les notations du Lemme 3.12) que

$$\begin{aligned}
\phi_1(Y_{t_1}) \dots \phi_k(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) &= \lim_{n\to\infty} \phi_1(X_{t_1+T_n} - X_{T_n}) \dots \phi_k(X_{t_k+T_n} - X_{t_{k-1}+T_n})\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{t_n^{j-1} < T \leq t_n^j}\, \phi_1(X_{t_1+t_n^j}) \dots \phi_k(X_{t_k+t_n^j} - X_{t_{k-1}+t_n^j}),
\end{aligned}$$

et que d'autre part, puisque $Z\,\mathbf{1}_{t^n_{j-1}<T\le t^n_j}$ est $\mathcal{F}_{t^n_j}$-mesurable pour tout j, la propriété de Markov simple (Théorème 1.15) implique

$$\mathbf{E}(Z\,\mathbf{1}_{t^n_{j-1}<T\le t^n_j}\phi_1(X_{t_1+t^n_j})\ldots\phi_k(X_{t_k+t^n_j}-X_{t_{k-1}+t^n_j}))=\mathbf{E}(Z\,\mathbf{1}_{t^n_{j-1}<T\le t^n_j})\,\mathbf{E}(\phi_1(X_{t_1}))\ldots\mathbf{E}(\phi_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})).$$

On conclut à (3.2) par le théoème de convergence dominée. ◫

Remarque 3.15 *Le théorème est également vrai (même preuve) pour toute filtration $\mathcal{F}$ à laquelle X est adapté et telle que $X_{t+s}-X_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ pour tout $t,s\ge 0$: par exemple la filtration càd $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}^X_{t+}$. On retrouve alors la loi du 0-1 comme conséquence de la propriété de Markov forte écrite pour la filtration $\mathcal{F}_{t+}$ et sous sa forme "processus de Markov", cf [Jac, p. 31].*

3.4 Applications: principes de réflexion.

Dans cette section B désigne un mouvement brownien, et pour $a\in\mathbb{R}^*$, on note T_a le tda p.s. fini (voir Théorème 2.2, Lemme 3.9).

Théorème 3.16 (Principe de réflexion 1). *On définit le processus brownien réflechi en $a\in\mathbb{R}^*$ par*

$$X_t := B_t \text{ si } t<T_a;\quad X_t := 2\,B_{T_a}-B_t = 2\,a-B_t \text{ si } t\ge T_a.$$

Alors $X_t\sim B_t$.

Le principe de réflexion dit donc que après l'instant T_a la droite $y=a$ est un axe de symétrie pour le mouvement Brownien (comme l'est la droite $y=0$ après l'instant $T_0=0$).

Preuve du théorème 3.16. On va appliquer la propriété de Markov forte au tda T_a

Preuve 1. On considère les processus

$$Y_t := B_{t\wedge T_a}\quad\text{et}\quad Z_t := B_{t+T_a}-a.$$

Le processus Y est $\mathcal{F}_{T_a}$-mesurable. En effet, pour tout $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0\le t\le s$, on a (cela a été démontré dans la preuve du lemme 3.12) $B_{t\wedge T_a}\in\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ et donc

$$\{B_{t\wedge T_a}\in A\}\cap\{T_a\le s\}\in\mathcal{F}_s,$$

alors que pour tout $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0\le s<t$ on a

$$\begin{aligned}\{Y_t\in A\}\cap\{T_a\le s\} &= \{B_{t\wedge T_a}\in A\}\cap\{T_a\le s<t\}\\ &= \{B_{t\wedge T_a}\in A \text{ et } T_a\le t\}\cap\{T_a\le s\}\\ &= \{B_{T_a}\in A\}\cap\{T_a\le s\},\end{aligned}$$

car B_{T_a} est $\mathcal{F}_{T_a}$ mesurable (lemme 3.12), donc $\{B_{T_a}\in A\}\in\mathcal{F}_{T_a}$ et la définition de $\mathcal{F}_{T_a}$ permet de conclure. La propriétés de Markov forte implique que Z est un mouvement brownien (donc $-Z$ également) et qu'il est indépendant de Y (donc $-Z$ également). Il s'ensuit que $\mathcal{L}(Y,Z)=\mathcal{L}(Y,-Z)$. On définit l'application

$$\varphi:(U,V)\ \mapsto\ (U_t\,\mathbf{1}_{t\le T_a}+(a+V_{t-T_a})\,\mathbf{1}_{t>T_a})_{t\ge 0},$$

qui à une paire de processus (U,V) $\mathcal{F}^B$-adaptés associe un processus $\varphi(U,V)$ $\mathcal{F}^B$-adapté (le vérifier!). On a d'une part que $\mathcal{L}(\varphi(Y,Z))=\mathcal{L}(\varphi(Y,-Z))$ et d'autre part $\varphi(Y,Z)=B$ et $\varphi(Y,-Z)=X$.

Preuve 2. Pour $x\in\mathbb{R}$, en utilisant que $B_{T_a}=a$ et en notant $Y_t:=B_{t+T_a}-B_{T_a}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_t\ge x) &= \mathbf{P}(X_t\ge x,\,t\le T_a)+\mathbf{P}(X_t\ge x,\,t>T_a)\\ &= \mathbf{P}(B_t\ge x,\,t\le T_a)+\mathbf{P}(B_{T_a}-B_t\ge x-a,\,t>T_a)\\ &= \mathbf{P}(B_t\ge x,\,t\le T_a)+\mathbf{P}(-Y_{t-T_a}\ge x-a,\,t>T_a).\end{aligned}$$

La propriétés de Markov forte implique que le processus Y est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}^B_{T_a}$, donc de T_a. On a donc également $-Y$ est un mouvement Brownien indépendant de T_a et donc enfin $\mathcal{L}(T_a, Y) = \mathcal{L}(T_a, -Y)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_{T_a} - B_t \geq x - a,\, T_a > t) &= \mathbf{P}(-Y_{t-T_a} \geq x - a,\, t > T_a) \\
&= \mathbf{P}(Y_{t-T_a} \geq x - a,\, t > T_a) \\
&= \mathbf{P}(B_t - B_{T_a} \geq x - a,\, T_a > t) = \mathbf{P}(B_t \geq x,\, T_a > t).
\end{aligned}$$

Pour justifier la deuxième égalité ci-dessus, on introduit la partie

$$H = H_{x-a,t} := \{(s, w) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R});\, s \leq t,\ w(t - s) \geq x - a\} \subset \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$$

qui est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ (pour voir cela il faudrait définir proprement la tribu canonique sur $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$! On en dira un mot dans la suite du cours). On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(-Y_{t-T_a} \geq x - a,\, t > T_a) &= \mathbf{P}((T_a, -Y) \in H_{x-a,t}) \\
&= \mathbf{P}((T_a, Y) \in H_{x-a,t}) = \mathbf{P}(Y_{t-T_a} \geq x - a,\, t > T_a)
\end{aligned}$$

En recollant les morceaux, on obtient

$$\mathbf{P}(X_t \geq x) = \mathbf{P}(B_t \geq x,\, T_a \leq t) + \mathbf{P}(B_t \geq x,\, T_a > t) = \mathbf{P}(B_t \geq x),$$

et donc X_t a même loi que B_t. ◻

Théorème 3.17 (Principe de réflexion 2). *Notons $S_t := \sup_{s \leq t} B_s$. Pour tout $b \geq 0$ et $a \leq b$, on a*

$$P(S_t \geq b,\, B_t \leq a) = P(B_t \geq 2b - a).$$

En particulier, S_t a même loi que $|B_t|$.

Preuve du théorème 3.17. On va appliquer la propriété de Markov forte au tda T_b. On a

$$P(S_t \geq b,\, B_t \leq a) = P(T_b \leq t,\, B_t - b \leq a - b) = P(T_b \leq t,\, B_t - B_{T_b} \leq a - b),$$

puisque $B_{T_b} = b$. Puisque le processus $Y_s = B_{s+T_b} - B_{T_b}$ est indépendant de $\mathcal{F}^B_{T_b}$, donc de T_b, et qu'il suit une loi gaussienne, donc symétrique, on a (voir la preuve du Théorème 3.16 pour les détails de l'argument)

$$\begin{aligned}
P(S_t \geq b,\, B_t \leq a) &= P(T_b \leq t,\, B_{T_b} - B_t \leq a - b) \\
&= P(T_b \leq t,\, -Y_{t-T_b} \leq a - b) \\
&= P(T_b \leq t,\, Y_{t-T_b} \leq a - b) \\
&= P(T_b \leq t,\, B_t \geq 2b - a) = P(B_t \geq 2b - a),
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que l'événement $\{T_b \leq t\}$ contient l'événement $\{B_t \geq 2b - a\}$.
Maintenant, pour tout $b \geq 0$, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_t \geq b) &= \mathbf{P}(S_t \geq b,\, B_t \geq b) + \mathbf{P}(S_t \geq b,\, B_t \leq b) \\
&= \mathbf{P}(B_t \geq b) + \mathbf{P}(B_t \geq 2b - b) \\
&= \mathbf{P}(-B_t \geq b) + \mathbf{P}(B_t \geq b) = \mathbf{P}(|B_t| \geq b),
\end{aligned}$$

et donc $S_t \sim |B_t|$. ◻

Corollaire 3.18 *Pour tout $a > 0$, la loi de T_a est la même que celle de a^2/B_1^2, et donc de densité*

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\,\pi\,t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\,t}\right) \mathbf{1}_{t>0}.$$

Preuve du corollaire 3.18. Pour $a \neq 0$ et $t > 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_a \leq t) &= \mathbf{P}(S_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a) \\
&= \mathbf{P}(B_t^2 \geq a^2) = \mathbf{P}(t\,B_1^2 \geq a^2) = \mathbf{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right),
\end{aligned}$$

de sorte que $T_a \sim \frac{a^2}{B_1^2}$. Enfin, par définition,

$$\begin{aligned}
f_{T_a}(t) &= \frac{d}{dt}\{\mathbf{P}(T_a \leq t)\} = \frac{d}{dt}\left\{\mathbf{P}(B_1^2 \geq a^2/t)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{2\int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right\} = \frac{a}{t^{3/2}}\,\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

pour tout $t > 0$. $\square$

Corollaire 3.19 *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s| \geq \varepsilon) \leq 2\,\mathbf{P}(|B_t| \geq \varepsilon).$$

Corollaire 3.20 (Loi forte des grands nombres). *On a*

$$p.s. \qquad \frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve du Corollaire 3.20. D'une part, en remarquant que

$$B_n := \sum_{i=1}^{n} [B_i - B_{i-1}]$$

est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi (celle de B_1), la loi forte des grands nombres usuelle (pour une suite de va iid et L^1) implique

$$p.s. \qquad \frac{B_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, on introduit la suite de va

$$\xi_n := \sup_{n < t \leq n+1} |B_t - B_n|.$$

Les ξ_n sont indépendant et de même loi (celle de ξ_1). De plus, d'après le corollaire 3.19,

$$\mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon) \leq 2\,P(|B_1| \geq \varepsilon).$$

Cela implique que $\xi_1 \in L^1$ puisque

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi_1) &= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{\varepsilon < \xi_1(\omega)}\,d\varepsilon d\omega = \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon)\,d\varepsilon \\
&\leq 2\int_0^\infty \mathbf{P}(|B_1| \geq \varepsilon)\,d\varepsilon = 2\,\mathbf{E}(|B_1|) < \infty.
\end{aligned}$$

De nouveau la loi forte des grands nombres usuelle implique que

$$p.s. \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(\xi_1).$$

Par conséquent

$$p.s. \qquad \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, on écrit

$$\frac{B_t}{t} = \frac{[t]}{t} \times \left\{ \frac{B_{[t]}}{[t]} + \frac{B_t - B_{[t]}}{[t]} \right\},$$

et on conclut en combinant les deux résultats de convergence précédents. □

4 Martingales.

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $M = (M_t)$ un processus sommable et $\mathcal{F}$-adapté. On dit que M est*

- *une $\mathcal{F}$-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$;*
- *une $\mathcal{F}$-surmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$;*
- *une $\mathcal{F}$-sousmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$.*

Lemme 4.2 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. (a) - M une $\mathcal{F}$-martingale et ϕ une fonction convexe telle que $\mathbf{E}(|\phi(M_t)|) < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors $\phi(M_t)$ est une $\mathcal{F}$-sousmartingale.*

4.1 Théorème d'arrêt ou de l'échantillonage.

Théorème 4.3 *Soient $\mathcal{F}$ une filtration, M une $\mathcal{F}$-martingale (resp. $\mathcal{F}$-surmartingale) càd, S et T deux $\mathcal{F}$-tda tels que $S \leq T \leq K \in \mathbb{R}_+$ p.s. Alors*

$$\mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S \qquad (\textit{resp. } \mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_S) \leq M_S). \tag{4.1}$$

En particulier, si M une $\mathcal{F}$-martingale et si T est un $\mathcal{F}$-tda borné, alors

$$\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_0).$$

Preuve du théorème 4.3. On procède en trois étapes.
Etape 1. Martingale discrète arrêtée. Soient $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une filtration, $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une martingale, T un tda à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $(M_{T\wedge j})$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_j)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_{T\wedge(j+1)} - M_{T\wedge j}|\mathcal{F}_j) &= \mathbf{E}((M_{T\wedge(j+1)} - M_{T\wedge j})\,\mathbf{1}_{T\geq j+1}|\mathcal{F}_j) && (\text{car } M_{T\wedge(j+1)} = M_{T\wedge j} \text{ sur } \{T \leq j\})\\
&= \mathbf{E}((M_{j+1} - M_j)\,\mathbf{1}_{T\geq j+1}|\mathcal{F}_j)\\
&= \mathbf{E}(M_{j+1} - M_j|\mathcal{F}_j)\,\mathbf{1}_{T\geq j+1} && (\text{car } \{T \geq j+1\} \in \mathcal{F}_j)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Etape 2. Le théorème dans le cas discret. Soient $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une filtration, $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une martingale, S, T deux tda à valeurs dans $\mathbb{N}$ tels que $S \leq T \leq K = cste$. Alors (4.1) a lieu. En effet, pour $A \in \mathcal{F}_S$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M_T) &= \sum_{j=1}^{K} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A\cap\{S=j\}}\, M_{T\wedge K})\\
&= \sum_{j=1}^{K} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A\cap\{S=j\}}\, M_{T\wedge j}) && (\text{par l'étape 1 et puisque } A\cap\{S=j\} \in \mathcal{F}_j)\\
&= \mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{K} \mathbf{1}_{A\cap\{S=j\}}\Big)\, M_{T\wedge S}\Big] = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M_S),
\end{aligned}$$

ce qui est précisément dire que $\mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_T$.

Etape 3. Le théorème dans le cas continu. On introduit la filtration $\mathcal{F}^n = (\mathcal{F}^n_j)$ avec $\mathcal{F}^n_j = \mathcal{F}_{t^j_n}$, la martingale discrète $M^n_j := M_{t^j_n}$, et les tda discrets S^n, T^n définis au ... et qui satisfont $S^n \leq T^n \leq K\,2^n$. En définissant les tda à valeurs entières $\tilde{T}^n_j = j$ si $T^n_j = j\,2^{-n}$, $\tilde{S}^n_j = j$ si $S^n_j = j\,2^{-n}$. Il est clair que le théorème d'arrêt dans le cas discret implique

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M_{T^n}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M^n_{\tilde{T}^n}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M^n_{\tilde{S}^n}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A\, M_{S^n}),$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_{S^n}$, et donc pour tout $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S^n}$. Puisque M est càd, on a $M_{S^n} \to M_S$ et $M_{T^n} \to M_T$, et on conclut par le théorème de convergence dominée. ◻

4.2 Une application du théorème d'arrêt.

Corollaire 4.4 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace (fonction génératrice) de T_a est*

$$\mathbf{E}(e^{-z\,T_a}) = e^{-\sqrt{2\,z}\,a} \qquad \forall\, z \geq 0.$$

Preuve du corollaire 4.4. Par symétrie du mouvement brownien il suffit de ne traiter que le cas $a \geq 0$. On souhaite appliquer le théorème 4.3 d'arrêt à la martingale $M_t := \exp(\sigma\, B_t - \sigma^2\, t/2)$ (voir Proposition 1.13) et au tda T_a. Comme celui-ci n'est pas borné, on applique le théorème au tda $T_a \wedge n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a donc

$$\mathbf{E}(M_{T_a \wedge n}) = \mathbf{E}(M_0) = 1.$$

Comme $B_{T_a\wedge n} \leq a$, on a $M_{T_a\wedge n} \leq e^{\sigma\,a}$, et comme $M_{T_a\wedge n} \to M_{T_a}$ sur $\{T_a < \infty\}$ et $M_{T_a\wedge n} \to 0$ sur $\{T_a = \infty\}$ (qui est de mesure nulle ...), on obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_a<\infty}\, e^{-\sigma^2\,T_a/2}) = e^{-\sigma\,a}.$$

En passant à la limite $\sigma \to 0$ on a $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_a<\infty}) = 1$ et on retrouve donc que $T_a < \infty$ ps. ◻

4.3 Inégalités de Doob.

Proposition 4.5 *Soit S une sous-martingale positive et càd. Alors*

$$\forall\, t > 0,\ \ \forall\, \lambda > 0 \qquad \mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t} S(s) \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}[S(t)].$$

Preuve de la Proposition 4.5. On commence par discrétiser le temps, puis on passe à la limite dans l'inégalité obtenue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $t_j := j\,t/n$ pour $j = 0,...,n$. Soit $J := \inf\{j;\, 0 \leq j \leq n \text{ et } S(t_j) \geq \lambda\}$ (avec la convention $J = \infty$ si l'ensemble est vide). On remarque que

$$\{J = j\} = \{S(t_j) \geq \lambda\} \backslash \left(\bigcup_{\ell=0}^{j-1} \{S(t_\ell) \geq \lambda\} \right)$$

de sorte que $\{J = j\} \in \mathcal{F}_{t_j}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda\,\mathbf{P}(\max_{0\leq j\leq n} S(t_j) \geq \lambda) &= \sum_{j=0}^{n} \lambda\,\mathbf{P}(J = j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{J=j}\,\mathbf{1}_{S(t_j)\geq\lambda}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{J=j} S(t_j)) \qquad\qquad \text{(Tchebichev)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{J=j}\mathbf{E}(S(t)|\mathcal{F}_{t_j})) && \text{(sous-martingale)}\\
&\le \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{E}(S(t)\,\mathbf{1}_{J=j}|\mathcal{F}_{t_j})) && \text{(car } \{J=j\} \text{ est } \mathcal{F}_{t_j}\text{-mesurable)}\\
&\le \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(S(t)\,\mathbf{1}_{J=j})\\
&\le \mathbf{E}(S(t)\,\mathbf{1}_{J\le n}) = \mathbf{E}(S(t)\,\mathbf{1}_{\max_{0\le j\le n} S(t_j)\ge\lambda}) \le \mathbf{E}(S(t)).
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 4.6 on a

$$p.s. \qquad X_k := \max_{0\le j\le 2^k} S(j\,2^{-k}\,t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} X := \sup_{s\in[0,t]} S(s).$$

On introduit la suite d'événements $A_k := \{X_k \ge \lambda\}$. La convergence précédente implique que

$$\{X > \lambda\} \subset \bigcup_{k\ge1} A_k.$$

Comme la suite (A_k) est croissante, on en déduit en utilisant "l'inégalité de Doob discrète"

$$\mathbf{P}(\max_{0\le s\le t} S(s) > \lambda) \le \mathbf{P}(\bigcup_k A_k) = \lim_k \mathbf{P}(A_k) \le \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}[S(t)].$$

Enfin, pour établir l'inégalité annoncée, on introduit la suite d'événements $B_m = \{X > \lambda - \varepsilon_m\}$ pour $\varepsilon_m \searrow 0$. On en déduit que

$$\mathbf{P}(\max_{0\le s\le t} S(s) \ge \lambda) = \lim_m \mathbf{P}(B_m) \le \lim_m \frac{1}{\lambda-\varepsilon_m}\,\mathbf{E}[S(t)] = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}[S(t)],$$

puisque (B_m) est une suite croissante et dont la limite est $\{X \ge \lambda\}$. $\square$

Exercice 4.6 *Soit* $\varphi : [0,t] \to \mathbb{R}$ *càd. Alors*

$$\sup_{[0,t]} \varphi = \lim_{k\to\infty} \max_{0\le j\le 2^k} \varphi(j\,2^{-k}t).$$

Une conséquence de la proposition 4.5 est le résultat suivant.

Théorème 4.7 *Soit* M *une martingale de carré intégrable et càd. Alors*

$$\begin{aligned}
&(i) \qquad \forall\, t>0,\ \forall\,\lambda>0 \qquad \mathbf{P}(\max_{0\le s\le t} |M(s)| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda^2}\,\mathbf{E}[M^2(t)];\\
&(ii) \qquad \forall\, t>0 \qquad \mathbf{E}[\max_{0\le s\le t} |M(s)|^2] \le 4\,\mathbf{E}[M^2(t)],
\end{aligned}$$

en particulier, la variable aléatoire $\max_{0\le s\le t} |M(s)|^2$ *est intégrable.*

Preuve du Théorème 4.7. *(i)* Soit $S := M^2$. C'est une sous-martingale positive et càd puisque pour $s < t$

$$\begin{aligned}
E(S_t|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2|\mathcal{F}_s) &= E((M_s + M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s)\\
&= E(M_s^2|\mathcal{F}_s) + 2\,E(M_s\,(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) + E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s)\\
&= M_s^2 + 2\,E(M_s)\,E(M_t - M_s|\mathcal{F}_s) + E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s)\\
&= M_s^2 + E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) \ge M_s^2 = S_s.
\end{aligned}$$

En appliquant alors la Proposition 4.5 on a

$$\mathbf{P}(\max_{0\le s\le t} |M(s)| \ge \lambda) = \mathbf{P}(\max_{0\le s\le t} M(s)^2 \ge \lambda^2) \le \frac{1}{\lambda^2}\,\mathbf{E}[M^2(t)],$$

pour tout $t > 0$, $\lambda > 0$.
(ii) On remarque que $|M(t)|$ est une sous-martingale positive, et on reprend l'inégalité

$$\lambda\,\mathbf{P}(Y_n \ge \lambda) \le \mathbf{E}(|M(t)|\,\mathbf{1}_{Y_n\ge\lambda}), \qquad Y_n := \max_{0\le j\le n} |M(t_j)|,$$

démontrée dans la proposition 4.5 dont on va intègrer chaque terme en λ ... . On a d'une part

$$\int_0^\infty \lambda\,\mathbf{P}(Y_n \ge \lambda)\,d\lambda = \mathbf{E}\int_0^\infty \lambda\,\mathbf{1}_{Y_n\ge\lambda}\,d\lambda = \mathbf{E}\int_0^{Y_n} \lambda\,d\lambda = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}(Y_n^2),$$

et d'autre part grâce à Cauchy-Schwarz (remarquer que $Y_n \in L^2(\Omega)$)

$$\int_0^\infty \mathbf{E}(|M(t)|\,\mathbf{1}_{Y_n\ge\lambda})\,d\lambda = \mathbf{E}\left(|M(t)|\int_0^\infty \mathbf{1}_{Y_n\ge\lambda}\,d\lambda\right) = \mathbf{E}(|M(t)|\,Y_n) \le \|M(t)\|_{L^2}\,\|Y_n\|_{L^2}.$$

En combinant ces deux égalités et cette inégalité, on obtient

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{E}(Y_n^2) \le \|M(t)\|_{L^2}\,\|Y_n\|_{L^2}, \quad \text{soit en simplifiant} \quad \mathbf{E}(Y_n^2) \le 4\,\mathbf{E}(M(t)^2).$$

Enfin, par convergence monotone et continuité à droite de $M(t)$ on a

$$\mathbf{E}(\max_{0\le j\le n} |M(t_j)|) \le 4\,\mathbf{E}(M(t)^2).$$

Deuxième preuve de (ii). On introduit une suite (t_j^n) de temps comme dans la Proposition 4.5, la sous-martingale $S(t) := |M(t)|$ (voir exercice 4.8) et le processus croissant $X_j := \sup_{0\le k\le j} S(t_k)$ et $X_{-1} = 0$. La différence $X_{j+1}^2 - X_j^2 = (X_{j+1} - X_j)(X_{j+1} + X_j)$ est majorée par $2\,S_{t_{j+1}}\,(X_{j+1} - X_j)$, puisqu'on a l'alternative $X_{j+1} = X_j$ ou bien $X_j < X_{j+1} = S_{t_{j+1}}$, de sorte que par définition d'une sous-martingale $\mathbf{E}(S_{t_{j+1}}|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}}) \le \mathbf{E}(S_t|\mathcal{F}^M_{t_{j+1}})$ et donc

$$\forall\, j \le n-1 \qquad \mathbf{E}[X_{j+1}^2 - X_j^2] \le \mathbf{E}[2\,S_{t_{j+1}}\,(X_{j+1} - X_j)] \le 2\mathbf{E}[S_t\,(X_{j+1} - X_j)].$$

En sommant cette inégalité entre $j = 0$ et $j = n-1$ et en utilisant Cauchy-Schwarz on a

$$\mathbf{E}[X_n^2] \le 2\mathbf{E}[S_t\,X_n] \le 2\,\mathbf{E}[S_t^2]^{1/2}\mathbf{E}[X_n^2]^{1/2},$$

ce qui prouve

$$\mathbf{E}[\sup_{0\le k\le n} M_{t_k}^2] \le 4\mathbf{E}[M_t^2].$$

On conclut en passant à la limite $n \to \infty$ et en utilisant le fait que M est càd. ◻

Exercice 4.8 *(i) Soit X une va et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On a l'inégalité de Jensen $|\mathbf{E}^{\mathcal{B}}X| \le \mathbf{E}^{\mathcal{B}}|X|$.*
(ii) Soit M une $\mathcal{F}$-Martingale, alors $|M|$ est une $\mathcal{F}$-sousmartingale.

4.4 Applications de l'inégalité maximale de Doob: loi des grands nombres.

Proposition 4.9 *Soit X un PAIScàd réel de carré intégrable. Alors*

$$p.s. \qquad \frac{X_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(X_1 - X_0).$$

Preuve de la Proposition 4.9. Supposons $X_0 = 0$ pour alléger la preuve. On se rappelle que $EX_t = \lambda\, t$, $\mathrm{var}(X_t) = \sigma\, t$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ d'après la remarque 1.11, et que $M_t := X_t - \mathbf{E}X_t$ est une martingale d'après la proposition 1.13. D'après la première inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{n,\varepsilon}\right) := \mathbf{P}\left(\left\{\max_{2^n \le t \le 2^{n+1}} \frac{|M_t|}{t} > \varepsilon\right\}\right) &\le \mathbf{P}\left(\max_{2^n \le t \le 2^{n+1}} |M_t| > \varepsilon\, 2^n\right) \\ &\le \frac{1}{(\varepsilon\, 2^n)^2}\mathbf{E}(M_{2^n}) = \frac{2\,\sigma}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

qui est une suite géométrique. On définit maintenant

$$V_n := \sup_{t \ge 2^n} \frac{|M_t|}{t}, \quad V := \lim_{n\to\infty} V_n = \limsup_{t\to\infty} \frac{|M_t|}{t}$$

Or d'une part

$$\mathbf{P}(|V_n| > \varepsilon) \le \sum_{m \ge n} \mathbf{P}\left(\left\{\max_{2^n \le t \le 2^{n+1}} \frac{|M_t|}{t} > \varepsilon\right\}\right) \le \frac{C}{2^n} \to 0,$$

et d'autre part puisque $V_n \nearrow V$

$$\mathbf{P}(V > \varepsilon) \le \mathbf{P}(V_n > \varepsilon)$$

de sorte que $\mathbf{P}(V > \varepsilon) \le C\, 2^{-n}$ pour tout $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\mathbf{P}(V > \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et enfin $\mathbf{P}(V > 0) = 0$. C'est exactement ce qu'il fallait prouver. ◻

Présentons maintenant une conséquence de ce résultat.

Proposition 4.10 *Si B est un mouvement brownien, $X_s := s\, B_{1/s}$, $s > 0$, $X_0 = 0$, est un mouvement brownien.*

Preuve de la Proposition 4.10. Le résultat découle de la caractérisation d'un mouvement Brownien en terme de processus gaussien et de la proposition 4.9 qui montre la continuité de X_s en 0 (en posant $t = 1/s \to \infty$!). ◻

Exercice 4.11 *Nous allons démontrer d'une autre façon que $X_s := s\, B_{1/s}$, $s > 0$, $X_0 = 0$, est un mouvement brownien.*

a) - Montrer que $X_s \sim B_s$ pour tout $s > 0$.

b) - Montrer que $X_s \to 0$ en loi, donc $X_s \to 0$ en probabilité. Pourquoi cela ne suffit-il pas?

c) - A l'aide du corollaire 3.19, montrer que $\sup_{s \le t} |X_s| \to 0$ en probabilité, et en déduire que $X_t \to 0$ p.s.

5 Correction des exercices.

Correction de l'exercice 4.6. On définit $\ell := \sup_{[0,t]} \varphi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On ne traite que le cas $\ell < \infty$, le cas $\ell = +\infty$ étant similaire. Pour $\varepsilon > 0$ on fixe $\tau \in [0,t]$ tel que $\varphi(\tau) \ge \ell - \varepsilon$. On définit alors une suite (τ_k) telle que $\tau_k \in \{j\, 2^{-k}t;\ 0 \le j \le 2^k\} \cap [\tau, \tau + 2^{-k}\, t[$. Cette suite satisfait $\tau_k \searrow \tau$ et par l'hypothèse càd on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0 \le j \le 2^k} \varphi(j\, 2^{-k}t) \ge \lim_{k\to\infty} \varphi(\tau_k) = \varphi(\tau) \ge \ell - \varepsilon,$$

et on conclut en faisant tendre ε vers 0. ◫

Correction de l'exercice 4.8. (i) Par définition on a $\mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X\, Z) = \mathbf{E}(X\, Z)$ pour tout $0 \le Z \in L^1(\mathcal{B})$. On a donc pour tout $0 \le Z \in L^1(\mathcal{B})$, et en notant $Z' := Z \,\mathrm{sign}\, \mathbf{E}^{\mathcal{B}} X \in L^1(\mathcal{B})$,

$$\mathbf{E}(|\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X|\, Z) = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}} X\, Z') = \mathbf{E}(X\, Z') \le \mathbf{E}(|X|\, Z) = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{\mathcal{B}} |X|\, Z).$$

(ii) Par (i) on a $\mathbf{E}(|M_t| \,|\, \mathcal{F}_s) \ge |\mathbf{E}(M_t \,|\, \mathcal{F}_s)| = M_s$. ◫

Détails de la preuve de la Proposition 4.9. On en déduit (par convergence monotone)

$$\mathbf{E}\left(\sum_n \mathbf{1}_{A_{n,\varepsilon}}\right) \le \sum_n \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon}) < \infty \quad \text{donc} \quad \sum_n \mathbf{1}_{A_{n,\varepsilon}} < \infty \text{ p.s.}$$

Cela signifie que p.s. "$\omega \in A_{n,\varepsilon}$ pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}$", ou encore que p.s. "$\omega \in A^c_{n,\varepsilon}$ à partir d'un certain rang", ou encore plus précisément

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{p.s.} \quad \limsup_{n\to\infty} \left(\max_{t \ge 2^n} \frac{|M_t|}{t} \right) \le \varepsilon.$$

On en déduit enfin

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \mathbf{E} X_1 \right) &= \mathbf{P}\left(\forall\, \varepsilon > 0,\ \limsup_{t\to\infty} \frac{|M_t|}{t} \le \varepsilon \right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_p \left\{ \limsup_{n\to\infty} \max_{t\ge 2^n} \frac{|M_t|}{t} \le \frac{1}{p} \right\} \right) = 1, \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une intersection dénombrable d'évenements certains (passer au complémentaire et utiliser encore un argument de convergence monotone). ◫

Correction de l'exrcices 4.11. b) - Pour montrer la continuité de X_t en 0 on dit que $|X_t|$ a même loi que $|B_t|$ et que $|B_t| \to 0$ en loi. Donc $|X_t| \to 0$ en loi et cela implique $|X_t| \to 0$ en probabilité puisque la limite est une constante. Malheureusement cela n'implique pas que $|X_t| \to 0$ p.s. (il existe une suite de fonctions positives majorées par 1 qui tend fortement dans L^1 vers 0 mais qui ne tend pas presque partout).

c) - Cette fois-ci la suite $Y_n := \sup_{s \le 1/n} |X_s|$ est décroissante et

$$\{ \limsup_{s\to 0} |X_s| > 0 \} = \{ \lim_{n\to\infty} Y_n > 0 \} = \bigcap_{k\ge 1} \{ \lim_{n\to\infty} Y_n \ge 1/k \}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{ \limsup_{s\to 0} |X_s| > 0 \}) &= \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\{ \lim_{n\to\infty} Y_n \ge 1/k \}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{ Y_n \ge 1/k \}) \\ &\le 2 \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{ |B_{1/n}| \ge 1/k \}) = 0. \end{aligned}$$

Cela implique donc $\mathbf{P}(\{ \limsup_{s\to 0} |X_s| = 0 \}) = 1$ et X_s est p.s. continue en 0. ◫

Bibliographie.

[BMP] P. Baldi, L. Mazliak, P. Priouret, *Martingales et chaînes de Markov*, Hermann 1998.

[BEK] M. Benaïm, N. El Karoui, *Promenade aléatoire - Chaînes de Markov et simulations; martingales et stratégies*, Les éditions de l'école polytechnique, 2005

[Bge] Philippe Bougerol, *Processus de sauts et files d'attente*, section 2.1 - Processus à accroissements indépendants stationnaires, cours de M1 téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC, 2001

[Ble] Nicolas Bouleau, *Processus stochastiques et applications*, chapitre 4 - Processus à accroissements indépendants, Mouvement brownien, Processus de Lévy, Hermann 2000

[CM] F. Comets, T. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffuions*, chapitre 2 - mouvement brownien et martingales, Dunod 2006

[Dos] Halim Doss, *Processus stochastiques continus*, chapitre 0 - processus stochastiques et chapitre 1 - Mouvement brownien, cours manuscrit, UPD

[Dur1] Rick Durrett, *Probability: theory and examples*, chapitre 7 - Brownian Motian, Duxbury advanced series 2005

[Dur2] Rick Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, chapitre 6, Springer

[FF] D. Foata, A. Fuchs, *Processus stochastiques*, chapitre 13 - Le mouvement brownien, Dunod 1998

[Jac] J. Jacob, *Chaînes de Markov, Processus de Poisson et Applications*, section 3.1 - Processus de Lévy, cours de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC

[LL] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, chapitre 3, Ellipses

[LeG1] J.-F. Legall, *Intégration, Probabilités et Processus aléatoires*, chapitre 14 - Introduction au mouvement brownien, 2006, cours de M1 téléchargeable, ENS Paris

[LeG2] J.-F. Legall, *Mouvement brownien et calcul stochastique*, chapitres 1 à 4, cours de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC

[Par] Etienne Pardoux, *Processus de Markov et applications*, chapitre 9 - Mathématiques Financières, Dunod 2007