TD 7 : Fondement des probabilités.

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

1 Indépendance, calcul de lois

Exercice 1. Donner l'expression de la fonction de répartition F des mesures de probabilité μ suivantes :

a) $\mu = \delta_a$ (mesure de Dirac) ;
b) $\mu = p\delta_b + (1-p)\delta_a$ (loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$) ;
c) $\mu = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$ (loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètre $p \in [0,1]$ sur $\{0,\ldots,n\}$) ;
d) $\mu = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \, dx$ (loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$).
e) $\mu = (b-a)^{-1}\lambda$, $a, b \in \mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ (loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$).

Exercice 2. ☞ Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x_1) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x_2)$$

a) Quelle est la densité de $Y_1 = X_1 + X_2$?
b) Quelle est la densité de $Y_2 = \frac{X_2}{X_1}$?
c) Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même densité $f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$. On pose $U = X_1 X_2$ et $V = \frac{X_1}{X_2}$.

a) Calculer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?
b) Calculer les lois marginales de U et V.

Exercice 4. ☞ On note $\Gamma(a, \lambda)$ la loi de densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois respectives $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$.
Calculer la loi du couple (S,T) et montrer que $S = X+Y$ et $T = \frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes.
En déduire que S suit une loi $\Gamma(a+b,\lambda)$ et la valeur de $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$.

b) Soient $(X_1, X_2, ...X_n)$ n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $Z = X_1^2 + X_2^2 ... + X_n^2$. Montrer que X_i^2 suit une loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et Z suit une loi $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 5. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer la loi de $X + Y$.

Exercice 6. ☞ Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire indépendante de X telle que

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z = XY$.

a) Quelle est la loi de Z ? Calculer $Cov(X, Z)$ et $Cov(X^2, Z^2)$. X et Z sont-elles indépendantes ?

b) On pose $U = X + Z$. Déterminer la loi de U et sa fonction de répartition. Si X et Z étaient indépendantes, quelle serait la loi de U ?

Exercice 7. (Fonctions caractéristiques)

a) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire constante p.s.

b) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi uniforme sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.

c) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$ (de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$)

d) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$ (de densité $f(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$)

e) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?

f) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 8. ☞ Soient A_1 et A_2 deux évenements. Décrire $\mathscr{A}_1 = \sigma(A_1)$ et $\mathscr{A}_2 = \sigma(A_2)$. Sans utiliser de théorème du cours, montrer que A_1 et A_2 sont indépendants si, et seulement si, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont indépendants. Même exercice pour n événements $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 3$.

Exercice 9. ☞ Soient $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ indépendantes, montrer que $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$. Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$ indépendantes, montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

2 Convergence de v.a.

Exercice 10. ☞ Soit (X_n) une suite de var iid $\mathcal{L}^2$. Montrer que

$$\bar{X}_n := \frac{S_n}{n} \ \to \ \mathbf{E}(X_1) \ \text{ dans } \ \mathcal{L}^2.$$

Exercice 11. ♠ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f(X_k)$.

b) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} X_k\right)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} X_k\right)\right]$.

c) En déduire

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+...x_n}{n}\right) dx_1..dx_n$$

Exercice 12. ♠ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre α.

a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)\right]$.

b) En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^j}{j!} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Exercice 13. ♠ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + ...X_n$.

Exprimer en fonction de la loi de S_n l'expression $e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ puis montrer, en utilisant le théorème de la limite centrale, que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 14. ☞ Montrer que la limite d'une suite de gaussiennes qui converge dans L^2 est une gaussienne dont on précisera l'espérance et la variance.

3 Retour sur l'asymptotique.

Exercice 15. ☞ **(Borel Cantelli)** Soit (A_n) une suite d'événements indépendants. Montrer que si $\sum\limits_{n\geq 1} \mathscr{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathscr{P}(\limsup A_n) = 1$. (Ind. On pourra calculer $\mathscr{P}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\big)$).

Exercice 16. ☞ **(Marche aléatoire)** Soit (X_n) une suite de var indépendantes de même loi définie par $\mathscr{P}(X_n = 1) = \mathscr{P}(X_n = -1) = 1/2$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

a) Pour deux entiers $p \geq 1$ et $k > 2p$ fixés, et pour tout $j \geq 0$, on définit

$$A_j := \{X_{jk+1} = X_{jk+2} = \cdots = X_{jk+k} = 1\}.$$

Calculer $\mathscr{P}(A_j)$ et montrer que les (A_j) sont indépendants. En déduire que

$$\mathscr{P}\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\Big) = 1,$$

puis que

$$\mathscr{P}\Big(\big\{\inf S_n \leq -p\big\} \cup \big\{\sup_n S_n \geq p\big\}\Big) = 1.$$

b) On définit $\mathscr{B}_n := \sigma(X_\ell,\, \ell \geq n\ \}$, puis la tribu asymptotique $\mathscr{B}_\infty := \lim \mathscr{B}_n$. Montrer que

$$\mathscr{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) + \mathscr{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big) \geq 1,$$

$$\mathscr{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) = \mathscr{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big),$$

ainsi que

$$\big\{\inf_n S_n = -\infty\big\} \in \mathscr{B}_\infty \quad \text{et} \quad \big\{\sup_n S_n = +\infty\big\} \in \mathscr{B}_\infty.$$

En déduire que

$$\mathscr{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) = \mathscr{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big) = 1.$$

Exercice 17. ♠ Soit (X_n) une suite de var et X une var.

a) Montrer que

$$\begin{aligned}\{(X_n) \text{ ne converge pas vers } X\} &= \bigcup_{\varepsilon>0} \limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\} \\ &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \limsup\left\{|X_n - X| > \frac{1}{p}\right\}\end{aligned}$$

b) Montrer que $X_n \to X$ p.s. ssi $\forall\varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$

c) Montrer que si $\forall\varepsilon > 0 : \sum_n \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) < \infty$ alors $X_n \to X$ p.s.

d) Montrer que si $\exists\varepsilon > 0 : \sum_n \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = \infty$ et si les événements $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ sont indépendants alors (X_n) ne converge pas vers X p.s.

Exercice 18. ♠

a) On considère la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq1}$ définies par

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité et au sens de L^p, pour $p \in [1, +\infty[$ mais que (X_n) ne converge pas vers 0 p.s. (utiliser l'exercice précédent). Que peut-on dire si $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$?

b) On considère la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq1}$ définies par

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité mais que (X_n) ne converge pas vers 0 p.s., ni au sens de L^p, pour $p \in [1, +\infty[$.