Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Corrigé du Partiel, Mardi 29 Octobre.
Durée : 2h.

Exercice 1 ($\sim$ 4,5 points).

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée.
   Corrigé : Voir le cours.
2) Déterminer la limite des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+nx^2}\, dx$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)} dx$$

lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).

Corrigé : On remarque tout d'abord que pour tout $x \in]0, \infty[$, les suites $(\frac{n}{\sin^2 n + nx^2})_{n\geq 1}$ et $(\frac{n}{1+nx^2})_{n\geq 1}$ convergent vers $\frac{1}{x^2}$. Cette dernière fonction n'étant *pas* intégrable en 0_+, on en déduit que le théorème de convergence dominée ne pourra pas être appliqué aux deux premières intégrales. On va donc appliquer Fatou et la convergence monotone aux deux premières intégrales. La présence du $\sin^2 n$ dans la première intégrale laisse présager qu'il n'y a pas de monotonie dans ce cas. En revanche, on calcule pour la deuxième intégrale :

$$\frac{n}{1+nx^2} = \frac{1}{1/n + x^2} ,$$

qui est une suite positive croissante pour tout $x \in]0, \infty[$. Ainsi, le théorème de convergence monotone assure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+nx^2}\, dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty , \quad n \to \infty .$$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}$ étant positive, le lemme de Fatou assure que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\, dx \geq \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\sin^2 n + nx^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty .$$

Traitons maintenant la troisième intégrale. Pour tout $x \in]0, \infty[$, on a l'équivalence $\sin(x/n) \sim x/n$ quand $n \to \infty$ de sorte que

$$\frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)} \longrightarrow \frac{1}{1+x^2} , \quad n \to \infty .$$

De plus, la borne $|\sin(x/n)| \leq x/n$ (qui est valide pour tout $x \geq 0$) assure que l'on a la domination

$$\frac{n^2|\sin(x/n)|}{(1+nx)(1+x^2)} \leq \frac{nx}{1+nx} \times \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Cette dernière fonction est continue sur $[0,+\infty)$ et intégrable en $+\infty$: elle est donc intégrable sur $]0,\infty[$ et l'on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2\sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} \ , \quad n \to \infty \ .$$

Exercice 2 ($\sim$ 2,5 points). Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}.$$

On énoncera précisément les théorèmes utilisés. On pourra introduire la série de fonctions

$$\sum f_n(x), \quad f_n(x) := e^{-nx}.$$

Corrigé : Pour tout $x \in]0,\infty[$, on remarque que

$$\sum_{n\geq 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \ .$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 1} xe^{-nx}dx \ .$$

Puisque les fonctions $x \mapsto xe^{-nx}$ sont mesurables positives sur $\mathbb{R}_+$, un résultat du cours assure qu'on peut intervertir série et intégrale (conséquence immédiate du théorème de convergence monotone), donc

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 1} xe^{-nx}dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx \ .$$

Or une intégration par parties assure que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx = \Big[-\frac{1}{n}xe^{-nx}\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = \frac{1}{n^2} \ .$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} \ .$$

Notons enfin qu'il est aussi possible de justifier la permutation série-intégrale en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction $g(x,n) = xe^{-nx}$ et à la mesure produit $dx\mu(dn)$ où μ est la mesure de comptage sur $\{1,2,\ldots\}$.

Problème 3 ($\sim$ 7 points).

1) Enoncer précisément le théorème de Fubini-Tonelli. Montrer que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\lambda(x,y),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.
Corrigé : Voir le cours pour l'énoncé du théorème. Dans le cas présent, on considère la fonction $(x,y)\mapsto e^{-(x^2+y^2)/2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc mesurable. Par ailleurs, cette fonction étant positive, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et obtenir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\,dy\Big)\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx\Big)^2 .\end{aligned}$$

2) Enoncer précisément le théorème de changement de variables. Montrer que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx\Big)^2 = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta r dr.$$

Corrigé : Voir le cours pour l'énoncé du théorème. Posons $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$. On considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi :]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) : x\geq 0\}\\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)\end{aligned}$$

Les espaces de départ et d'arrivée sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et il n'est pas difficile de vérifier que cette application est bijective. Par ailleurs, la valeur absolue de sa Jacobienne vaut r. En utilisant enfin le fait que $\{(x,0) : x\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ est de mesure de Lebesgue nulle, le théorème de changement de variables assure que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):x\geq 0\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\lambda(x,y)\\ &= \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f\circ\varphi(r,\theta) r dr d\theta\end{aligned}$$

On observe que $f\circ\varphi(r,\theta) = e^{-r^2/2}$, de sorte que

$$\int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f\circ\varphi(r,\theta) r dr d\theta = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} e^{-r^2/2} r dr d\theta\ .$$

En utilisant à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, $(r,\theta)\mapsto e^{-r^2/2}$ étant mesurable positive, et en combinant ce calcul avec le résultat de la question précédente, on obtient le résultat voulu.

3) En déduire que la mesure

$$\mu := g\lambda,\quad g(x) := (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2},$$

est une mesure de probabilité, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Corrigé : On commence par calculer l'intégrale apparaissant à la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r d\theta dr &= 2\pi\int_0^\infty \frac{d}{dr}\Big(-e^{-r^2/2}\Big)\,dr\\ &= 2\pi\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} g\lambda = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = (2\pi)^{-1/2} \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta r dr \right)^{1/2} = 1 \ .$$

4) Montrer que les fonctions

$$G_1(y) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \cos(yx) g(x)\, dx, \quad G_2(y) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \sin(yx) g(x)\, dx,$$

sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et calculer G_1' et G_2'. En déduire que la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par $G(y) := G_1(y) + iG_2(y)$, est de classe C^1 et que

$$G'(y) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x e^{ixy} e^{-x^2/2}\, dx, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Corrigé : Traitons en détail le caractère C^1 de G_1. Posons $f(x,y) = \cos(yx)g(x)$. On voit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|f(x,y)| \le g(x)$ qui est intégrable donc G_1 est bien défini. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1 et l'on a les dominations

$$|f(x,y)| \le g(x) \ , \qquad \left| \frac{df(x,y)}{dy} \right| = |-x\sin(yx)g(x)| \le |x| g(x) \ .$$

Les deux fonctions qui apparaissent dans ces dominations ne dépendent pas de y et sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car ce sont, par exemple, des $o(1/x^2)$ en $\pm\infty$). Ainsi d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, on déduit que G_1 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de dérivée :

$$G_1'(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} -x\sin(yx)g(x)\, dx \ .$$

Un raisonnement analogue donne

$$G_2'(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x\cos(yx)g(x)\, dx \ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
G'(y) = G_1'(y) + iG_2'(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x\big(-\sin(yx) + i\cos(yx)\big)g(x)\, dx \\
&= \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x\big(i\sin(yx) + \cos(yx)\big)g(x)\, dx \\
&= \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x e^{ixy} g(x)\, dx \\
&= \frac{i}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} x e^{ixy} e^{-x^2/2}\, dx \ .
\end{aligned}$$

(Il y avait une erreur sur la constante de l'énoncé).

5) Montrer que

$$\int_{-A}^{A} x e^{ixy} e^{-x^2/2}\, dx = iy \int_{-A}^{A} e^{ixy} e^{-x^2/2}\, dx + e^{-iAy} e^{-A^2/2} - e^{iAy} e^{-A^2/2},$$

pour tout $A > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$.
Corrigé : On applique la formule d'intégration parties en intégrant $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ et en dérivant $x \mapsto e^{ixy}$.

6) En déduire que $G'(y) = -yG(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\frac{d}{dy}(G(y)e^{y^2/2})$$

et en déduire que $G = g$.
Corrigé : Par le théorème de convergence dominée, on peut montrer que

$$\int_{-A}^{A} xe^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} xe^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx\ , \quad A \to \infty\ ,$$

et de même

$$\int_{-A}^{A} e^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx\ , \quad A \to \infty\ .$$

En utilisant la question précédente, et en passsant à la limite $A \to \infty$ en remarquant que $|e^{-A^2/2}e^{\pm iAy}| = e^{-A^2/2} \to 0$, on obtient alors

$$G'(y) = \frac{i}{(2\pi)}\int_{\mathbb{R}} xe^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx = \frac{-y}{(2\pi)}\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx = -yG(y)\ .$$

On calcule ensuite

$$\frac{d}{dy}(G(y)e^{y^2/2}) = G'(y)e^{y^2/2} + yG(y) = 0\ .$$

Ceci assure qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $G(y) = ce^{-y^2/2}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or $G(0) = G_1(0) = (2\pi)^{-1/2}$ de sorte que $c = (2\pi)^{-1/2}$ et ainsi $G = g$.

Problème 4 ($\sim$ 6 points) Sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne, $\mathbb{S}$ la sphère unité et $\mathbb{B}$ la boule unité définies par

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}, \quad \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}.$$

On note $\mathscr{B}$ la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue définies sur $\mathbb{R}^n$ et de la même manière leurs restrictions à $\mathbb{B}$.

1) Montrer que

$$\mathcal{S} := \{C \cap \mathbb{S};\ C \in \mathscr{B}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{S}$.
Corrigé : Il suffit de reconnaître ici la tribu trace de $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{S}$: c'est par définition la tribu image réciproque $i^{-1}(\mathscr{B})$ où $i : \mathbb{S} \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}), x \mapsto x$ est l'identité.

2) On définit l'application

$$T : \mathbb{B}\backslash\{0\} \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto T(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que $\omega := T_\sharp(n\lambda)$ est une mesure positive sur $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$.
Pour $A \in \mathcal{S}$, on définit

$$C(A) := \{rx;\ r \in]0,1],\ x \in A\} \in \mathscr{B} \cap \mathbb{B}.$$

Montrer que

$$\omega(A) = n\lambda(C(A)), \quad \forall\, A \in \mathcal{S}.$$

Corrigé : L'application $T : \mathbb{B} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}$ est continue donc $(\mathscr{B}(\mathbb{B} \setminus \{0\}), \mathscr{B}(\mathbb{S}))$ mesurable. Ainsi ω définit bien une mesure : c'est la mesure image de la mesure $n\lambda$ sur $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ par l'application mesurable T. (On observera que, d'après un résultat du cours, $\mathscr{B}(\mathbb{S})$ est la tribu trace de $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{S}$, soit $\mathcal{S}$. De plus, $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ est un Borélien).

Si $x \in A$ et $r \in]0, 1]$, alors $T(rx) = x \in A$ de sorte que $C(A) \subseteq T^{-1}(A)$, et réciproquement si $T(x) \in A$ où $x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$, $x = |x|T(x) \in C(A)$ d'où l'on obtient que $C(A) = T^{-1}(A)$. Par définition, $\omega(A) = (n\lambda)(T^{-1}(A)) = n\lambda(C(A))$.

3) Pour $A \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1[$, on définit

$$C_{\alpha,k}(A) := \{rx;\ \alpha^{k+1} < r \leq \alpha^k,\ x \in A\} \in \mathscr{B} \cap \mathbb{B}.$$

Pour $A \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $\lambda(C_{\alpha,k}(A)) = \alpha^{nk}\lambda(C_{\alpha,0}(A))$, puis que

$$\lambda(C(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(C_{\alpha,k}(A)) = (1 - \alpha^n)^{-1}\lambda(C_{\alpha,0}(A)).$$

Corrigé : On constate que $C_{\alpha,k}(A) = \alpha^k C_{\alpha,0}(A)$, et par homogénéité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (ou en utilisant le théorème de changement de variable par l'homothétie $x \mapsto \alpha^k x$),

$$\lambda(C_{\alpha,k}(A)) = \lambda(\alpha^k C_{\alpha,0}((A)) = (\alpha^k)^n \lambda(C_{\alpha,0}((A)).$$

À présent, remarquons que $C(A) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} C_{\alpha,k}(A)$ puisque pour tout $r \in]0, 1]$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{k+1} < r \leq \alpha^k$. Par σ-additivité, on obtient

$$\lambda(C(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(C_{\alpha,k}(A)) = \lambda(C_{\alpha,0}(A)) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{kn} = (1 - \alpha^n)^{-1}\lambda(C_{\alpha,0}(A)).$$

4) Pour $A \in \mathcal{S}$ et $0 < a < b < \infty$, on définit

$$C(A, a, b) := \{rz;\ a < r \leq b;\ z \in A\} \in \mathscr{B}.$$

Montrer que

$$\lambda(C(A, a, b)) = b^n\, \lambda(C_{a/b,0}(A)).$$

Corrigé : On voit que $C(A, a, b) = b\{rz : a/b < r \leq 1, z \in A\} = bC_{a/b,0}(A)$. Encore une fois, par l'homogénéité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $\lambda(C(A, a, b)) = b^n\lambda(C_{a/b,0}(A))$.

5) Déduire des questions précédentes que

$$\lambda(B) = (b^n - a^n)\frac{1}{n}\omega(A),$$

pour $B = C(A, a, b)$, $A \in \mathcal{S}$ et $0 < a < b < \infty$, puis que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\, d\lambda(x) = \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{S}} \mathbf{1}_B(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr.$$

Corrigé : En utilisant les question 4) et 3) avec $\alpha = a/b$, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda(B) = \lambda(C(A, a, b)) \overset{4)}{=} b^n\lambda(C_{a/b,0}(A)) &\overset{3)}{=} b^n(1 - (a/b)^n)\lambda(C(A)) \\ &= (b^n - a^n)\lambda(C(A)) \\ &= (b^n - a^n)\frac{1}{n}\omega(A).\end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'intégrale double est égal à cette même expression. Remarquons pour cela que si $r > 0$ et $z \in \mathbb{S}$, $rz \in C(A, a, b)$ si et seulement si $a < r \leq b$ et $z \in A$, de sorte que $\mathbf{1}_B(rz) = \mathbf{1}_{a<r\leq b}\mathbf{1}_{z\in A}$, d'où l'on déduit :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} \mathbf{1}_B(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr = \int_a^b r^{n-1} dr \int_A d\omega = \frac{b^n - a^n}{n} \omega(A).$$

6) Conclure que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} f(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr,$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Corrigé : On pose $\mu(B) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} \mathbf{1}_B(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr$ pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. D'après 5), $\lambda(B) = \mu(B)$ lorsque B est de la forme $B = C(A, a, b)$ où $A \in \mathcal{S}$ et $0 < a < b < \infty$. On vérifie aisément par interversion $\Sigma - \int$ que μ est une mesure, et que la collection $\mathscr{C} = \{C(A, a, b) : A \in \mathcal{S}, 0 < a < b < \infty\}$ est un π-système qui engendre la tribu Borélienne (tout ouvert est réunion dénombrable d'éléments de $\mathscr{C}$). Ainsi par le théorème $\pi - \lambda$, $\mu = \lambda$. Par conséquent la relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} f(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr \tag{1}$$

est vrai pour toute f de la forme $f = \mathbf{1}_B$ où $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. La relation (1) est stable par combinaison linéaire positive, donc elle est vrai pour toute fonction étagée positive. Puisque toute fonction mesurable positive f peut s'écrire comme limite croissante de fonctions étagées positives f_k, le théorème de limite monotone permet de déduire (1) pour toute fonction mesurable positive, puis par linéarité pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ en écrivant $f = f^+ - f^-$ et sachant que $\int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda < \infty$.