TD 6 : Fondement des probabilités (Chapitre 7).

On traitera en priorité les exercices notés d'une *

1 Indépendance, calcul de lois

Exercice 1.* Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x_1)\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x_2)$$

a) Quelle est la densité de $Y_1 = X_1 + X_2$?

b) Quelle est la densité de $Y_2 = \frac{X_2}{X_1}$?

c) Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même densité $f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$. On pose $U = X_1X_2$ et $V = \frac{X_1}{X_2}$.

a) Calculer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?

b) Calculer les lois marginales de U et V.

Exercice 3.* On note $\Gamma(a, \lambda)$ la loi de densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$.
Calculer la loi du couple (S, T) et montrer que $S = X+Y$ et $T = \frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes.
En déduire que S suit une loi $\Gamma(a + b, \lambda)$ et la valeur de $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$.

b) Soient $(X_1, X_2, ...X_n)$ n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $Z = X_1^2 + X_2^2 ... + X_n^2$. Montrer que X_i^2 suit une loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et Z suit une loi $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 4. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer la loi de $X + Y$.

Exercice 5.* Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire indépendante de X telle que

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z = XY$.

a) Quelle est la loi de Z ? Calculer $Cov\,(X, Z)$ et $Cov\,(X^2, Z^2)$. X et Z sont-elles indépendantes ?

b) On pose $U = X + Z$. Déterminer la loi de U et sa fonction de répartition. Si X et Z étaient indépendantes, quelle serait la loi de U ?

Exercice 6. (Fonctions caractéristiques)

a) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire constante p.s.

b) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi uniforme sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.

c) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$ (de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$)

d) Calculer la fonction caractéristique de X si X suit une loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$ (de densité $f(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$)

e) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?

f) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 7.* Soient A_1 et A_2 deux évenements. Décrire $\mathscr{A}_1 = \sigma(A_1)$ et $\mathscr{A}_2 = \sigma(A_2)$. Sans utiliser de théorème du cours, montrer que A_1 et A_2 sont indépendants si, et seulement si, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont indépendants. Même exercice pour n événements $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 3$.

Exercice 8.* Soient $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ indépendantes, montrer que $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$. Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$ indépendantes, montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

2 Convergence de v.a.

Exercice 9.* Soit (X_n) une suite de var iid $\mathcal{L}^2$. Montrer que

$$\bar{X}_n := \frac{S_n}{n} \;\to\; \mathbf{E}(X_1) \;\text{ dans }\; \mathcal{L}^2.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} f(X_k)$.

b) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} X_k\right)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} X_k\right)\right]$.

c) En déduire

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right) dx_1..dx_n$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre α.

a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)\right]$.

b) En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^j}{j!} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Exercice 12. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + ...X_n$.
Exprimer en fonction de la loi de S_n l'expression $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ puis montrer, en utilisant le théorème de la limite centrale, que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13.* Montrer que la limite d'une suite de gaussiennes qui converge dans L^2 est une gaussienne dont on précisera l'espérance et la variance.

3 Variables gaussiennes

Exercice 14.* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $M \in \mathcal{M}_{kd}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que
$$\mathbb{E}(MX) = M\mathbb{E}(X), \; D_{MX} = MD_X \, {}^tM.$$

b) X suit une loi $\mathcal{N}_d(0, I)$ et M est une matrice orthogonale à coefficients réels. Déterminer la loi de $U = MX$.

c) Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, D)$ où

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. Déterminer la loi du vecteur $Y = P^{-1}X$.

Exercice 15.* Soient $X_1, X_2, ...X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. $a_1, a_2, ...a_n$ et $b_1, b_2, ...b_n$ sont des réels.
On pose $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$.

a) Montrer que le vecteur $Z = (X, Y)$ est gaussien.

b) Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Exercice 16. Soient X et Y deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et de coefficient de corrélation $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in]0,1[$.
On suppose que le couple (X, Y) est gaussien. Soit $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$.

a) Déterminer la loi de (X, Z) avec le moins de calculs possibles. Quelle est la loi de (X, Y) ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

Exercice 17.* Soient X, Y, Z indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$

b) Montrer que les variables $X + Y + Z$, $2X - Y - Z$ et $Y - Z$ sont indépendantes.

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ, d'espérance et de variance finies.
Soient $Y_1 = \frac{1}{2}X_1,\ Y_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + X_2)\,, ...Y_n = \frac{1}{2}(Y_{n-1} + X_n)$...

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
b) On suppose que X_1 suit une loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Exercice 19. Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance K satisfait $\det K > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $X = \mu + BY$ où Y suit la loi $\mathcal{N}_d(0, I)$.

Exercice 20. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de densité

$$f(x) = C \exp -\frac{1}{2}\left(7\|x\|^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3\right).$$

Soit de plus Y le vecteur défini par $X = AY$ avec

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Y admet une densité de probabilité, et déterminer : cette densité, la valeur de C, la matrice de covariance de Y et celle de X.