TD 4 : Révisions et compléments (chapitres 3 à 5)

On traitera en priorité les exercices notés d'une *

I - Chapitres 3 & 4

Exercice 1.* Discuter l'appartenance à $\mathcal{L}^p(A)$ des fonctions $|x|^\alpha$ et $|x|^\alpha \log|x||^\beta$ suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et l'ensemble $A = B_1$ ou $A = B_1^c$.

Exercice 2.*

1) Dans $[-1, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction f qui appartient à tous les espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$, mais pas à $\mathcal{L}^\infty$. Dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction f qui appartient à $\mathcal{L}^\infty$ mais à aucun des espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$.
2) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, montrer que
$$f \in \mathcal{L}^p, \ \forall\, p \in [1, \infty), \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$
(Ind. On pourra établir et utiliser l'inégalité $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \geq C\mu(\{|f| \geq C\})^{1/p}$).
3) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telles que
$$f \in \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_{\mathcal{L}^p} \leq C, \quad \forall\, p \in [1, \infty).$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C$. (Ind. On pourra estimer $\mu(\{|f| \geq A\})$ pour $A > C$).

Exercice 3.* Ici $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré et $\mathcal{L}^\alpha$ l'espace de Lebesgue associé.

1) Montrer que pour tout $1 < r < p \leq \infty$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_r \leq \|f\|_1^\theta \, \|f\|_p^{1-\theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{p}.$$
[Appliquer Hölder aux fonctions $|f|^{r\theta}$ et $|f|^{r(1-\theta)}$].
2) Montrer que si $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ et (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^r$ pour tout $r \in [1, p[$.
3) On suppose de plus que μ est finie. Montrer que si $f_n \to f$ p.p. et (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^r$ pour tout $r \in [1, p[$. [Utiliser la décomposition $g = g \wedge M + (g - M)_+$].

Exercice 4. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe C^1. On rappelle que si X est un espace vectoriel, une fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe si
$$\forall\, u, v \in X, \ \forall\, \lambda \in [0, 1], \quad \Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v).$$

1) Montrer que pour une fonction f étagée, on a

$$\varphi\Big(\int_E f\,d\mu\Big) \leq \int_E \varphi(f)\,d\mu. \tag{1}$$

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\varphi(f) \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'inégalité (1) a encore lieu. *(Ind. Observer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(s) := \varphi(s) - as - b \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et utiliser la question 1) et la fonction ψ).*

Dans la suite, on pose

$$H(f) = \int_{[0,1]} f\,\ln f\,dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, lorsque cette quantité est bien définie.

3) Montrer que $H(f)$ est bien définie comme élément de $[-e^{-1}, +\infty]$ ($+\infty$ compris) pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable. *(Ind. On pourra montrer que la fonction $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $j(s) = s\ln s$ est au dessus de sa tangente au point $s = e^{-1}$).* Montrer que $H(f) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra montrer que la fonction j est au dessus de sa tangente au point $s = 1$).* Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $H(f) = +\infty$. *(Ind. Discuter de l'intégrabilité de $x \mapsto x^{-1}|\ln x|^{-\alpha}$ suivant la valeur de $\alpha > 0$).*

On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions $g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mesurables.

4) Soient (f_n) une suite de $\mathscr{M}_+$ et $f \in \mathscr{M}_+$ telles que $H(f_n) \leq C < \infty$ pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to f$ en mesure.
   - Montrer que $f_n \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$ pour tout $M > 0$.
   - Montrer que $H(f) \leq C$. *(Ind. On pourra écrire $f_{n_k}\,\ln f_{n_k} = f_{n_k}\,(\ln f_{n_k})_+ - f_{n_k}\,(\ln f_{n_k})_-$ pour une suite extraite $(f_{n_k})_k$ convenablement choisie).*
   - En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra écrire $s = s \wedge M + (s - M)_+$).*

II - Incontournables sur le chapitre 5

Exercice 5.* Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Pour $f \in \mathcal{L}^p$, $p \in [1, \infty[$, montrer que

$$\int_E |f|^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu\big(\{|f| \geq t\}\big)\,dt.$$

Exercice 6.* [Volume de la boule euclidienne] Calculer le volume ω_d de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$. On pourra trouver une relation de récurrence entre ω_d et ω_{d-2}.

Exercice 7.* Calculer l'intégrale

$$I = \int_{y>x>0} e^{-y+x}\frac{\sqrt{y-x}}{y^2}d\lambda_2(x,y).$$

[Indication : on pourra considérer le changement de variable $u = y - x, v = y/x$.]

III - Intégrabilité uniforme (si le reste est fait)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. On dit que $\mathcal{F}$ est *equi-intégrable* si

— $\mathcal{F}$ est absolument équicontinue, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in \mathcal{F}, \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon. \tag{AEC}$$

— $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}^1$, i.e.

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int |f| d\mu < \infty. \tag{BL1}$$

Exercice 8. [Caractérisation] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. Montrer que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable si et seulement si elle vérifie (BL1) ainsi que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \int_{|f| \geq M} |f| d\mu \leq \varepsilon. \tag{AEC'}$$

Exercice 9. [Quelques conditions suffisantes] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable dans les cas suivants :

a) $\mathcal{F} = \{f\}$ où $f \in \mathcal{L}^1$,

b) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $|f| \leq g$ pour tout $f \in \mathcal{F}$,

c) $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^p$ où $p > 1$.

Exercice 10. On suppose que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables.

a) Montrer que $f_n \to f$ p.p. et (f_n) équi-intégrable impliquent $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$. [On pourra procéder comme dans l'exercice 3.3)].

b) Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ si et seulement si $f_n \to f$ en mesure et (f_n) est équi-intégrable.