TD 6 : Intégration dans $\mathbb{R}^d$

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

1 Convolution

Exercice 1. ☞ Soit G la gaussienne centrée réduite et

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-x^2/2\lambda}.$$

Calculer $G_s * G_t$ pour tout $t, s > 0$.

Exercice 2. ☞ Pour $a, \lambda > 0$, on définit

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx.$$

Montrer que $\gamma_{a,\lambda} dx$ est une mesure de probabilité. En déduire $\gamma_{a,\lambda} * \gamma_{b,\lambda}$.

Exercice 3. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^p$ alors $f * g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Exercice 4. Soient μ et ν sont deux mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. On pose

$$\sigma(A) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x+y \in A} d(\mu \otimes \nu)(x,y), \quad \text{pour tout borélien } A \subset \mathbb{R}^d.$$

a) Montrer que σ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, on note $\mu * \nu$.

b) Remarquer que $\mu * \nu$ est une mesure finie et que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

On suppose désormais que $\mu = f\lambda$ avec $0 \le f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et λ la mesure de Lebesgue.

c) Montrer qu'il existe une fonction $\omega_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\omega_f(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$ et

$$\int_B f\, dx \le \omega(\lambda(B)), \quad \text{pour tout borélien } B \subset \mathbb{R}^d.$$

[On pourra écrire $f = f \wedge M + (f - M)_+$]

d) Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. [On pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonelli]

e) Montrer qu'il existe une fonction $0 \le h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle $\mu * \nu = h\lambda$ et que h satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi h\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu * \nu),$$

pour toute fonction borélienne et positive φ.

e) En déduire que

$$h(x) = (f * \nu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\nu(dy) \quad \text{pour p.t. } x \in \mathbb{R}^d.$$

2 Densité

Exercice 5. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. [On pourra utiliser l'exercice 3]

Exercice 6. ☞ Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\mu = \nu$ si, et seulement si

$$\forall\, \varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^d),\ k \in \bar{\mathbb{N}}, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\nu.$$

[On pourra ne traiter que le cas $d = 1$, $k = 0$ et commencer par montrer que $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$]

Exercice 7. [Théorème de Stone-Weierstrass de densité des polynômes dans $C(K)$] Pour un compact $K \subset \mathbb{R}^d$, on note $C(K)$ l'espace des fonctions continues (bornées) de K dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans $C(K)$ au sens de la convergence uniforme. [On pourra ne traiter que le cas $K = [-1/4, 1/4]$ en dimension $d = 1$ et introduire l'approximation de l'identité (ρ_n) définie par $\rho_n(x) := c_n(1 - x^2)^n$ si $x \in [-1, 1]$, $\rho_n(x) := 0$ si $x \notin [-1, 1]$, c_n convenablement choisie]

Exercice 8. [Moments] Soit $f \in L^1([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$M_k(f) := \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\, dx = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \text{implique} \quad f = 0.$$

[On pourra utiliser l'exercice 7]

3 Transformation de Fourier

Exercice 9. ☞ Montrer que la transformation de Fourier satisfait les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{F}$ est linéaire au sense où $\mathcal{F}(f + tg) = \mathcal{F}(f) + t\mathcal{F}(g)$.

b) $\mathcal{F}(xf)(\xi) = -i(\hat{f}(\xi))'$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

c) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

d) $\mathcal{F}\tau_a f = e^{ia\xi}\hat{f}$ pour $a \in \mathbb{R}^d$, où on note $(\tau_a f)(x) := f(x - a)$ la fonction translatée de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

e) $(\check{\mathcal{F}}f)(\xi) := (\mathcal{F}f)(-\xi) = (\mathcal{F}\check{f})(\xi)$, où on note $\check{g}(x) := g(-x)$. Que dire de $\mathcal{F}f$ si f est une fonction paire ?

Exercice 10. ☞ Calculer $\hat{f}$ lorsque

a) $f_1 := \mathbf{1}_{[-a,a]}$, $a > 0$;

b) $f_2(x) := \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$;

c) $f_3(x) := \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$, $\lambda > 0$;

Exercice 11. ☞ Soit $f(x) = (1 - |x|)\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

a) Montrer que $f(x) = \mathbf{1}_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]} * \mathbf{1}_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(x)$ et calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$.

b) En déduire que $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1-\cos t}{t^2} dx$.

Exercice 12. ☞ Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\mathcal{F}(\mu) = \mathcal{F}(\nu)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}(\rho * \mu) = \mathcal{F}(\rho * \nu)$ pour tout $\rho \in C_c(\mathbb{R}^d)$.
2) Montrer que $\rho * \mu = \rho * \nu$ pour tout $\rho \in C_c(\mathbb{R}^d)$.
3) Montrer que $\mu = \nu$. [On pourra utiliser l'exercice 6]