TD 4 : Théorèmes de Fubini et de changement de variables

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants) notés d'un ♠.

Exercice 1. Soit E_1 et E_2 deux ensembles et $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(E_1)$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(E_2)$. Notons $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2;\ A_i \in \mathcal{A}_i\}$. A-t-on l'égalité suivante, entre tribus de $E_1 \times E_2$,

$$\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_1) \otimes \sigma(\mathcal{A}_2) \ ?$$

Exercice 2. Soit $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables. On considère l'espace produit $(E, \mathcal{B})$ avec $E = E_1 \times E_2$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. On pose

$$\mathcal{B}_1' = \{B \times E_2 \ ;\ B \in \mathcal{B}_1\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{B}_1'$ est une sous tribu de $\mathcal{B}$.

b) Soit $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{B}$-mesurable. Montrer que F est $\mathcal{B}_1'$-mesurable si et seulement si il existe une fonction mesurable $f : E_1 \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(x_1, x_2) = f(x_1).$$

Exercice 3.
a) Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
b) Soit μ la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4. ♠ Montrer que le graphe d'une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

Exercice 5. ☞ Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

a) Soit $u : E \to [0, +\infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que

$$\int_E u \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E : u(x) \geq t\}) dt.$$

b) Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $u : E \to [0, +\infty]$ une fonction positive mesurable. Montrer que

$$\int_E u^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in E : u(x) \geq t\}) dt.$$

Exercice 6. [Principe de Cavalieri] Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, $f : E \to [0, \infty]$ une fonction mesurable et $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, de classe C^1 et telle que $\Phi(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E \Phi(f) d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \Phi'(\lambda)\, \rho_f(\lambda) d\lambda,$$

où $\rho_f(\lambda) := \mu(\{x \in E;\ |f(x)| > \lambda\})$ et $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mu)$, monotones de même sens et vérifiant $fg \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

(Indication : considérer la fonction $\varphi(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)))$

Exercice 8. Soit $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ borélienne et $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y^2 + z^2 \leq f(x)\}.$$

a) Montrer que l'application

$$F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = y^2 + z^2 - f(x)$$

est borélienne et en déduire que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$.
b) Pour $x \in [0, 1]$ déterminer la section $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ et calculer sa mesure.
c) Calculer le volume de A en fonction de f. Vérifier que $Vol(A) = \pi/3$ si $f = x^2$.

Exercice 9. ☞ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable. Calculer alors son intégrale.

Exercice 10.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
b) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xt} \sin x dx\right) dt$.
c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
d) Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11.

a) Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2 y)}$ pour obtenir la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$.
b) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 12. ♠ Soit $B \subset \mathbb{R}^2$. On définit l'ensemble $t(B) = \{x_1 \in \mathbb{R} / (x_1, 0) \in B\}$ et on considère

$$T = \{B \subset \mathbb{R}^2 / t(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

a) Montrer que T est une tribu contenant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.
Dans la suite, on suppose que $B = A \times \{0\}$, où A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $B \notin \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.
c) Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et ρ la rotation d'angle θ : pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta).$$

Notant 1_B la fonction indicatrice de B, on pose $f = 1_B \circ \rho$. Montrer que f n'est pas borélienne mais que les fonctions $f(., x_2)$, $f(x_1, .)$ sont fonctions boréliennes d'une variable.

Exercice 13. Soient μ et ν deux mesures σ-finies définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Montrer que l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.
b) Montrer que $(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$ où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14. Soit F une fonction càd-làg, croissante et tq $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

1) Montrer que la fonction $G :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$G(u) := \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq u\}$$

est càg-làd.

2) En notant λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, montrer que la mesure image $G_\sharp \lambda$ a pour fonction de répartition F.

Exercice 15. On note $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ l'espace euclidien usuel de dimension n et $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r > 0$. On va calculer le volume ω_n de la boule unité $B(0, 1)$ en jouant avec la fonction Γ. On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.
b) Exprimer le volume de $B(0, r)$ en fonction de ω_n.
c) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : \ e^{-\|x\|^2} > t\}) dt\,.$$

d) En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, déduire de la formule ci-dessus que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \omega_n \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}} dt\,.$$

e) En déduire que $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.
f) Montrer que pour $s > 1$, on a $\Gamma(s) = (s - 1)\Gamma(s - 1)$. En déduire par récurrence la valeur de $\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, pour tout entier naturel n, puis le volume ω_n de la boule unité :

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si} \quad n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Exercice 16. ♠ Soit Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme de jacobien J_φ.

a) Montrer que J_φ est intégrable sur Δ si et seulement si $\lambda_d(D) < +\infty$.

b) Montrer que J_φ est borné sur Δ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset \Delta$, $\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\lambda_d(\Omega)$.

Exercice 17.
Soit $\Delta =]0,1[^2 \times]-\pi,\pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos w, v\sin w)$.

a) Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de Δ sur son image.

b) Calculer $\lambda_3(\varphi(\Delta))$.

Exercice 18.

a) Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2+v^2, 2uv)$ est un C^1-difféomorphisme de $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u > v > 0\}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y > 0\}$.

b) En déduire la valeur de $\int_{(\mathbb{R}_+)^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} dudv$.

Exercice 19. ☞

a) Montrer que l'application

$$\psi :]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

est un C^1 difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ sur son image, que l'on déterminera précisément.

b) Calculer le volume de la boule $B(0,R)$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon $0 \leq R \leq 1$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Calculer la valeur de

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz.$$

d) Calculer le volume d'une calotte, c'est-à-dire de l'intersection de la boule unité $B(0,1)$ avec le demi-espace $r\cos\theta > a$ pour $0 < a < 1$.

Exercice 20. ☞ Calculer l'intégrale

$$I = \int_{y>x>0} e^{-y+x} \frac{\sqrt{y-x}}{y^2} d\lambda_2(x,y).$$

[Indication : on pourra considérer le changement de variable $u = y - x, v = y/x$.]