TD2. Mesures et Intégrale de Lebesgue

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

Exercice 1. Soit δ_a la mesure de Dirac au point a définie sur les boréliens de $\mathbb{R}$ par $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$, $\delta_a(B) = 0$ sinon.

a) Vérifier que δ_a est une mesure sur la tribu des boréliens.

b) Calculer l'intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à δ_a, puis par rapport à une combinaison $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}$ où $\forall i, \lambda_i \geq 0$.

Exercice 2. ☞ On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que λ est σ-finie.

b) Montrer que $\lambda(K) < +\infty$ pour tout ensemble compact (fermé borné) de $\mathbb{R}$.

c) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ? Même question pour un fermé ?

d) Construire un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle.

e) Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue égale à 3.

Exercice 3. ♠ [Ensemble de Cantor]
Soit (d_n) une suite de $]0, 1[$ et notons $K_0 := [0, 1]$. On définit la suite décroissante $(K_n)_{n\geq1}$ de la façon suivante : connaissant K_{n-1}, qui est une réunion finie d'intervalles fermés disjoints, on définit K_n en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \lim K_n$. On pouura se contenter de traiter le cas $d_n := 1/3$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.

b) Calculer la mesure de Lebesgue de K.

c) On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n := 1/3$ pour tout $n \geq 1$. Vérifier que

$$K_3 = \Big\{ \sum_{n\geq1} \frac{a_n}{n} ; \, (a_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \Big\}.$$

Montrer que K_3 est non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 4. ♠
Démontrer qu'il n'existe pas de mesure μ finie et non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation.

Exercice 5. ☞ Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mu_f : \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. Elle est appelée mesure image de μ par f.

Exercice 6. ☞ Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(E) > 0$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A. *(Ind. On pourra considérer la suite (A_n) définie par $A_n = \{|f| \leq n\}$ et montrer que l'on peut prendre $A := A_n$ si n est assez grand).*

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 7. ☞ [Lemme de Fatou pour une suite d'ensembles]
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite d'ensembles mesurables.

a) Montrer que $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$;

b) Montrer que $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$, si on suppose de plus μ est finie.

Exercice 8. ☞ [Lemme de Borel-Cantelli]
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n \in \mathcal{A}$ une suite d'ensembles mesurables telle que $\sum_n \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Exercice 9. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures finies sur $(E, \mathcal{A})$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$. *(Ind. On pensera à utiliser le Lemme de Fatou et le Lemme de Borel-Cantelli).*

Exercice 10. ☞ Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on définit

$$\mu_f(A) = \int_E \mathbb{1}_A f d\mu.$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exercice 11. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit f une fonction $A \to \mathbb{R}$ μ-intégrable telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-presque partout.

b) Soit f une fonction $A \to \mathbb{R}$ μ-intégrable et F un fermé de $\mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int_A f d\mu \in F$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$.

  i) Soit $a < b$ tels que $]a, b[\subset F^c$. Montrer que $\mu(f^{-1}(]a, b[)) = 0$.

  ii) En déduire que $f(x) \in F$ pour presque tout x.

Exercice 12. ♠
Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf \left\{ \mu(A^1) + \nu(A^2) : A = A^1 \sqcup A^2, A^1, A^2 \in \mathcal{A} \right\}.$$

a) Montrer que $\mu \wedge \nu \leq \mu$ et $\mu \wedge \nu \leq \nu$.

b) Montrer que $\mu \wedge \nu$ est une mesure.

c) Montrer que si ξ est une mesure telle que $\xi \leq \mu$ et $\xi \leq \nu$ alors $\xi \leq \mu \wedge \nu$.

Exercice 13. ♠ Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. On définit le support S de μ par

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \mu([x-r, x+r]) > 0,\ \forall\, r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}\backslash S) = 0$ et que $\mu(S\backslash F) = \mu(\mathbb{R}\backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S.

Exercice 14. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures. On définit $\mu := \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i$ en posant pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \sum_i \mu_i(A).$$

a) Montrer que μ est une mesure.
b) Montrer que pour toute fonction f mesurable positive, $\int f d\mu = \sum_i \int f d\mu_i$.
c) Montrer qu'une fonction mesurable f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_i \int |f| d\mu_i < +\infty$, puis que dans ce cas $\int f d\mu = \sum_i \int f d\mu_i$.

Exercice 15. ☞
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On définit sa fonction de répartion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

a) Montrer que F est càd-làg (continue à droite et admet des limites à gauche), croissante, $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$. Montrer en particulier que F admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que F est continue en x si, et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$. En déduire que $\{x \in \mathbb{R};\ \mu(\{x\}) \neq 0\}$ (ensemble des atomes de μ) est au plus dénombrable. En déduire μ n'a pas d'atome si, et seulement si $F(\mathbb{R}) \supseteq]0, 1[$.

Exercice 16. **(Théorème d'Egoroff)**
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.
b) On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(E \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$E_n^k = \bigcap_{i\geq n} \left\{ |f_i - f| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que $C \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n^k$. En déduire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left(E \setminus E_{n_{k,\varepsilon}}^k\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
c) (Théorème d'Egoroff) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ε et tel que $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.
d) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(E) = +\infty$.

Exercice 17. ♠
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

a) Montrer que si $\mu(E) < +\infty$ et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers f, alors elle converge en mesure vers f.

b) Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f :

i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

ii) Soit $A = \underline{\lim}_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge simplement vers f sur A et que $\mu(E \setminus A) = 0$ (en d'autres termes, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f).

Exercice 18. ♠

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. On considère une classe d'ensembles $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ telle que

$$E \in \mathcal{B}, \quad A \cap B \in \mathcal{B}, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}. \tag{π}$$

On suppose de plus

$$\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mu(A) = \nu(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{B}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mu = \nu$.

1) On commence par donner un exemple d'application.

a) - Montrer que la famille d'ensembles $\mathcal{B} := \{]t, +\infty[,\ t \in \bar{\mathbb{R}}\}$ vérifie (π) et $\sigma(\mathcal{B}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

b) - En déduire que si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont les fonctions de répartition coïcident, alors $\mu = \nu$. On commencera par rappeler la définition d'une fonction de répartition.

On définit

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A};\ \mu(A) = \nu(A)\}.$$

2) On rappelle qu'une "classe monotone" est une classe d'ensembles stable par limites croissantes et limites décroissantes. Montrer que $\mathcal{G}$ est une classe monotone.

3) Montrer que pour tout $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$, on a

$$\lambda(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = \lambda(B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}) + \lambda(B_k) - \lambda(B_1' \cup \cdots \cup B_{k-1}'),$$

avec $B_i' := B_i \cap B_k$ et où λ désigne μ ou ν.

4) Montrer par récurrence que $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}$ implique $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathcal{G}$.

5) Montrer que $A, B \in \mathcal{G}$, $A \subset B$, implique $B \backslash A \in \mathcal{G}$.

On définit

$$\mathcal{C} := \Big\{\bigcap_{i\in I} A_i,\ I \text{ fini},\ A_i \in \mathcal{B} \text{ ou } A_i^c \in \mathcal{B}\Big\}.$$

6) Montrer que tout élément $B \in \mathcal{C}$ peut s'écrire

$$B = A_0 \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c = A_0 \backslash (A_1' \cup \cdots \cup A_k'),$$

avec $A_i, A_i' \in \mathcal{B}$. En déduire que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

On définit

$$\mathcal{D} := \Big\{\bigcup_{j\in J} B_j,\ J \text{ fini},\ B_j \in \mathcal{C}\Big\}.$$

7) Par un argument de récurrence, déduire des questions 3) et 6) que $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$.

8) Montrer que $\mathcal{D}$ est une algèbre et conclure que $\mu = \nu$.