Université Paris-Dauphine — **2022-2023**
Cours de “Intégrale de Lebesgue et Probabilités” — Septembre 2020

Chapitre 3 - Théorèmes de convergence

Table des matières

Sont écrites en rouge les parties hors programme, en violet les parties traitées en TD (résultats à connaître pour sa culture).

Dans ce chapitre $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Etant données (f_n) une suite de fonctions mesurables réelles et f une fonction mesurable réelle, on définit les convergences suivantes :
• On dit que $f_n \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$ si

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty, \quad \|g\|_1 := \int_E |g| d\mu.$$

• On dit que $f_n \to f$ presque partout (p.p.) s’il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que

$$\forall\, x \in A,\ f_n(x) \to f(x) \text{ lorsque } n \to \infty \quad \text{et} \quad \mu(A^c) = 0.$$

• On dit que $f_n \to f$ en mesure si

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mu\{|f_n - f| > \alpha\} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Nous allons établir plusieurs résultats de convergence et en particulier faire des liens entre les différentes convergences ci-dessus. Il est à noter que la convergence $\mathcal{L}^1$ implique la convergence en mesure (c’est une conséquence immédiate de l’inégalité de Tchebychev, voir également la Proposition 4.3) mais que c’est la seule implication vraie. Trouver des exemples de suites qui convergent en l’un des sens ci-dessus mais pas aux deux autres sens est un bon exercice. Ces résultats ainsi que les résultats de convergence établis au chapitre précédent (Lemme de Fatou, Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi) forment une famille d’outils puissants propre à la théorie de l’intégrale de Lebesgue.

1 Théorème de convergence monotone

Théorème 1.1 (de convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1$ qui est soit croissante, soit décroissante, de sorte que $f = \lim f_n$ existe et est mesurable. On a*

$$f \in \mathcal{L}^1 \text{ si, et seulement si, la suite } (\ell_n) \text{ est bornée,} \quad \ell_n := \int f_n d\mu.$$

Dans les deux cas, on a

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu, \tag{1}$$

et en particulier

$$\int |f - f_n| d\mu \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Il convient de remarquer que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ implique

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu,$$

mais que cette dernière convergence des intégrales n'implique pas la convergence au sens $\mathcal{L}^1$ en général. Par exemple, $f_n := \mathbf{1}_{[0,1]} - \mathbf{1}_{[-1,0]} \not\to f \equiv 0$ dans $\mathcal{L}^1([-1,1])$ bien que les intégrales de ces fonctions soient toutes nulles. Dans le cas de la convergence monotone qui nous intéresse ici, $f_n \leq f$ ou $f_n \geq f$ pour tout $n \geq 1$, la situation est plus favorable puisque $\pm|f_n - f| = f_n - f$.

Preuve du Théorème 1.1. On commence par supposer que la suite (f_n) est croissante. On a alors (f_n^+) est croissante, (f_n^-) est décroissante et $f^+ = \lim f_n^+$, $f^- = \lim f_n^-$. Si $f \in \mathcal{L}^1$, alors $0 \leq f_n^+ \leq f^+$, $0 \leq f_n^- \leq f_0^-$, de sorte que $(\|f_n^\pm\|_{L^1})$ est bornée, et donc également (ℓ_n). Dans les deux cas, on peut donc faire l'hypothèse que (ℓ_n) est majorée, par une constante notée K. On a alors

$$\int f_n^- d\mu \leq \int f_0^- d\mu, \quad \int f_n^+ d\mu = \int f_n d\mu + \int f_n^- d\mu \leq K + \int f_0^- d\mu.$$

Grâce au théorème de Beppo-Levi appliqué à (f_n^+), on obtient

$$\int f^+ d\mu = \lim \int f_n^+ d\mu \leq K + \int f_0^- d\mu. \tag{2}$$

Grâce au théorème de Beppo-Levi appliqué à $(f_0^- - f_n^-)$, on déduit

$$\int f^- d\mu = \lim \int f_n^- d\mu \leq \int f_0^- d\mu. \tag{3}$$

On conclut donc que $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^1$ ainsi que (1). Le cas d'une suite (f_n) décroissante se traite de manière similaire ou en considérant la suite croissante $(-f_n)$. La dernière convergence se montre en remarquant que $|f - f_n| = \pm(f - f_n)$ suivant la monotonie de (f_n) et en utilisant (2)-(3). □

2 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 2.1 (de convergence dominée de Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1$ telle que*
(i) la suite (f_n) converge p.p. vers une limite f mesurable ;
(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle $|f_n| \leq g$ p.p.
Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int |f - f_n| d\mu \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

En particulier

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Voici trois exemples de suites de fonctions qui ne satisfont pas l'hypothèse (ii) de domination du Théorème 2.1 ni sa conclusion :

- $f_n := \mathbf{1}_{[n,n+1]} \to 0$ ponctuellement mais $\|f_n\|_1 = 1 \not\to 0$.
- $f_n := \frac{1}{2n}\mathbf{1}_{[-n,n]} \to 0$ uniformément mais $\|f_n\|_1 = 1 \not\to 0$.
- $f_n := n\mathbf{1}_{[1/n,2/n]} \to 0$ ponctuellement mais $\|f_n\|_1 = 1 \not\to 0$.

Preuve du Théorème 2.1. Il existe A négligeable tel que les propriétés (i) et (ii) sont vraies pour tout $x \in B := A^c$. La suite $\varphi_n := |f_n - f|\mathbf{1}_B$ satisfait $\varphi_n \in \mathscr{M}_+$, $\varphi_n \leq \varphi := 2g$ et $\varphi_n \to 0$ ponctuellement. On a

$$\begin{aligned}\int \varphi d\mu &= \int \liminf[\varphi - \varphi_n]d\mu \\ &\leq \liminf \int [\varphi - \varphi_n]d\mu \\ &= \int \varphi d\mu - \limsup \int \varphi_n d\mu,\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme de Fatou à la deuxième ligne. On en déduit

$$\limsup \int \varphi_n d\mu = 0,$$

d'où on conclut aisément. □

Corollaire 2.2 (σ-additivité complète)**.** *Si (E_n) est une suite de $\mathscr{A}$ qui forme une partition de E et si $f \in \mathcal{L}^1$, on a*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Preuve du Corollaire 2.2. On applique le Théorème 2.1 de convergence dominée à la suite $f_n := f\,\mathbf{1}_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$. □

Proposition 2.3 (de continuité par rapport au paramètre)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : E \times I \to \mathbb{R}$ une fonction, $g \in \mathcal{L}^1$ et A un négligeable tels que*
(i) $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable pour tout $\lambda \in I$;
(ii) $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue sur I pour tout $x \in A^c$;
(iii) $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$ pour tout $x \in A^c$ et $\lambda \in I$.
Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto F(\lambda) := \int_E f(x, \lambda)d\mu$$

est continue.

Preuve de la Proposition 2.3. On fixe $\lambda \in I$ et on considère (λ_n) une suite de I telle que $\lambda_n \to \lambda$. On pose $\varphi_n(x) := f(x, \lambda_n)$ et $\varphi(x) := f(x, \lambda)$. Le Théorème de convergence dominée implique

$$\int \varphi_n d\mu \to \int \varphi d\mu,$$

ce qui est précisément dire que F est continue en λ. □

Proposition 2.4 (de dérivation sous le signe somme)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f : E \times I \to \mathbb{R}$ une fonction, $g \in \mathcal{L}^1$ et A un négligeable tels que*
(i) $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable pour tout $\lambda \in I$;
(ii) $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est dérivable sur I pour tout $x \in A^c$;
(iii) $|\partial_\lambda f(x, \lambda)| \leq g(x)$ pour tout $x \in A^c$ et $\lambda \in I$.

Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$F'(\lambda) = \int_E \partial_\lambda f(x,\lambda) d\mu.$$

Si de plus $\partial_\lambda f(x,\lambda)$ est continue sur I pour tout $x \in A^c$, alors F est de classe C^1.

Preuve de la Proposition 2.4. On fixe $\lambda \in I$ et pour une suite (h_n) tendant vers 0, on définit

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{h_n}[f(x,\lambda+h_n) - f(x,\lambda)], \quad \varphi(x) := \partial_\lambda f(x,\lambda).$$

Le Théorème de convergence dominée implique

$$\frac{1}{h_n}[F(\lambda+h_n) - F(\lambda)] = \int \varphi_n d\mu \to \int \varphi d\mu = \int_E \partial_\lambda f(x,\lambda) d\mu,$$

ce qui est précisément dire que F est dérivable, de dérivée le terme de droite. □

3 Théorème d'Egorov

Théorème 3.1 (Egorov)**.** *On suppose ici que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure totale finie. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables et p.p. convergente. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{A}$ telle que $\mu(A) < \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément sur A^c.*

Si μ n'est pas finie alors la conclusion peut être fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ, de sorte que $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, la suite de fonctions $f_n := \mathbf{1}_{[n,\infty)}$ converge vers 0 p.p. mais pas uniformément (ni uniformément à un ensemble petit près).

Preuve du Theorem 3.1. Posons $f := \lim f_n$, qui est donc une fonction mesurable, et

$$B_{k,N} := \bigcap_{n \geq N} \{|f_n - f| \leq \frac{1}{k}\},$$

qui est donc une famille d'ensembles mesurables. Par hypothèse, pour tout $k \geq 1$ fixé, la suite $(B_{k,N})_N$ est croissante de limite contenant $E' := \{x \in E;\, \lim f_n(x) = f(x)\}$, avec $\mu(E \backslash E') = 0$. Comme $\mu(E) < +\infty$, on en déduit $\mu(E \backslash \lim_{N\to\infty} B_{k,N}) = 0$. Il existe donc un entier $N(k)$ tel que $\mu(E \backslash B_{k,N(k)}) \leq \varepsilon/2^k$. On définit $A := \cup_{k\geq 1}(E \backslash B_{k,N(k)})$. D'une part, on a évidemment $\mu(A) \leq \varepsilon$. D'autre part, sur l'ensemble $A^c = \cap_{k\geq 1} B_{k,N(k)}$, on a $|f_n - f| \leq \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq N(k)$, ce qui est la convergence uniforme annoncée. □

Voici une version affaiblie du Théorème d'Egorov qui en est également un corollaire.

Corollaire 3.2 (d'Egorov)**.** *On suppose μ finie. La convergence $f_n \to f$ p.p. implique la convergence $f_n \to f$ en mesure.*

Comme précédemment l'hypothèse μ finie est essentielle : $f_n := \mathbf{1}_{[n,\infty)}$ converge vers 0 λ-p.p. dans $\mathbb{R}$, mais pas en mesure.

Preuve 1 du Lemme 3.2. Fixons $\alpha > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, grâce au théorème d'Egorov, il existe A mesurable tel que $\mu(A^c) < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A. On a donc

$$\mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) \leq \mu(A^c) + \mu(A \cap \{|f_n - f| > \alpha\}) < \varepsilon,$$

pour n assez grand (de sorte que $\sup_A |f_n - f| \leq \alpha$). □

Nous donnons maintenant une preuve alternative qui n'utilise pas le Théorème d'Egorov.

Preuve 2 du Lemme 3.2. On a $|f_n - f| \wedge 1 \to 0$ et $|f_n - f| \wedge 1 \leq 1 \in \mathcal{L}^1$, puisque μ est finie. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit $|f_n - f| \wedge 1 \to 0$ dans $\mathcal{L}^1$. Pour tout $\alpha > 0$, on utilise la croissance de l'application $s \mapsto s \wedge 1$ et l'inégalité de Tchebychev pour conclure

$$\mu(|f_n - f| > \alpha) \leq \mu(|f_n - f| \wedge 1 \geq \alpha \wedge 1) \leq \frac{1}{\alpha \wedge 1} \int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$. □

Théorème 3.3 (une réciproque au corollaire d'Egorov)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge en mesure vers une fonction mesurable f. On peut alors en extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge p.p. vers f.*

Preuve du Theorem 3.3. Notons $B_{k,n} := \{|f_n - f| > 1/k\}$. Définissons (n_k) une suite telle que $\mu(B_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$ et posons $B_K := \cup_{k \geq K} B_{k,n_k}$. La suite $(B_K)_{K \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{A}$ telle que $\lim_{K \to \infty} \mu(B_K) = 0$, puisque

$$\mu(B_K) \leq \sum_{k \geq K} \mu(B_{k,n_k}) \leq 2^{1-K}.$$

On pose $A := E \setminus \cap_{K \in \mathbb{N}} B_K$. On a $\mu(A^c) = \mu(\cap_{K \in \mathbb{N}} B_K) = 0$. Pour tout $x \in A$, on a également, $x \notin B_{K_0}$ pour un certain $K_0 \in \mathbb{N}$, soit donc $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k$ pour tout $k \geq K_0$, ce qui implique bien $f_{n_k}(x) \to f(x)$ lorsque $k \to \infty$. □

4 Autres théorèmes de convergence

Nous terminons ce chapitre en présentant encore quelques résultats de convergence

Théorème 4.1 (inversion signes somme et intégral)**.** *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Alors il existe $S \in \mathcal{L}^1$ telle que $S_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ converge p.p. vers S et

$$\lim \int |S_N - S| d\mu = 0.$$

En particulier

$$\int S d\mu = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Preuve du Théorème 4.1. On définit $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, qui par hypothèse et grâce au Théorème de Beppo-Levi satisfait $g \in \mathcal{L}^1$. On définit $A := \{g = \infty\}$ qui est un ensemble négligeable, de sorte que la série $(f_n(x))$ est absolument convergente, donc convergente, pour tout $x \in A^c$. On définit

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ si } x \in A^c, \quad S(x) := 0 \text{ si } x \in A,$$

de sorte que $S_N \to S$ p.p. et $|S_N| \leq g$ p.p. On conclut grâce au Théorème 2.1 de convergence dominée. □

Théorème 4.2 (réciproque partielle à Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$ telles que*

$$\int |f - f_n| \, d\mu \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Alors, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telles que

(i) la suite (f_{n_k}) converge p.p. vers sa limite f ;

(ii) il existe $h \in \mathcal{L}^1$ telle $|f_{n_k}| \le h$ p.p.

Preuve du Théorème 4.2. On observe que (f_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$. On définit (f_{n_k}) par récurrence de telle sorte que pour tout $k \ge 1$, on a

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \le 2^{-k}.$$

Posant

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \quad g := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

il vient $\|g_n\|_1 \le 1$, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que $g_n \to g$ ponctuellement (également au sens $\mathcal{L}^1$) et que $g \in \mathcal{L}^1$. On observe alors que pour $\ell > k$

$$|f_{n_\ell} - f_{n_k}| \le \sum_{i=k}^{\ell-1} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| = g_\ell - g_k \le g - g_k.$$

Il en résulte que (f_{n_k}) est p.p. une suite de Cauchy donc p.p. une suite convergente. En posant $f^* = \lim f_{n_k}$ sa limite p.p. et en passant à la limite $\ell \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|f^* - f_{n_k}| \le g - g_k \le g.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée pour la suite $(f^* - f_{n_k})$, on en déduit $f_{n_k} \to f^*$ dans $\mathcal{L}^1$. Par unicité de la limite, on a donc $f^* = f$ p.p. et on conclut en posant $h := g + f^*$. □

Proposition 4.3. *La convergence $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ implique la convergence $f_n \to f$ en mesure.*

Preuve de la Proposition 4.3. D'après l'inégalité de Tchebychev du Théorème II.3.4, on a

$$\mu\{|f_n - f| > \alpha\} \le \frac{1}{\alpha} \int_E |f_n - f| d\mu \to 0,$$

pour tout $\alpha > 0$. □

Théorème 4.4 (equi-intégrabilité)**.** *On suppose μ finie et on fixe $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante et telle que $\phi(s)/s \to \infty$ lorsque $s \to \infty$. Les conditions ($f_n \to f$ en mesure ou $f_n \to f$ p.p.) et $\phi(|f_n|)$ bornée $\mathcal{L}^1$ impliquent $f_n \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$.*

Preuve du Theorem 4.4. On suppose $f_n \to f$ p.p. et donc $\phi(|f_n|) \to \phi(|f|)$ p.p. puisque ϕ est continue. Grâce au lemme de Fatou, on a $\phi(|f|) \in \mathcal{L}^1$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f| &\le \int_E |f_n - f| \mathbf{1}_{|f_n - f| \le M} + \int_E (|f_n| + |f|) \mathbf{1}_{|f_n - f| > M} \\ &\le \int_E |f_n - f| \mathbf{1}_{|f_n - f| \le M} + \int_E (|f_n| \mathbf{1}_{|f_n| \le K} + |f| \mathbf{1}_{|f| \le K}) \mathbf{1}_{|f_n - f| > M} \\ &\quad + \int_E (|f_n| \mathbf{1}_{|f_n| > K} + |f| \mathbf{1}_{|f| > K}) \mathbf{1}_{|f_n - f| > M}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on utilise le théorème de convergence dominée qui implique

$$\int_E |f_n - f| \mathbf{1}_{|f_n - f| \le M} \to 0.$$

C'est ici que l'on utilise le caractère fini de μ qui implique $|f_n - f|\mathbf{1}_{|f_n-f|\le M} \le M \in \mathcal{L}^1$. Pour le second terme, on utilise le corollaire d'Egorov qui implique

$$\int_E (|f_n|\mathbf{1}_{|f_n|\le K} + |f|\mathbf{1}_{|f|\le K})\mathbf{1}_{|f_n-f|>M} \le 2K\mu\{|f_n - f| > M\} \to 0.$$

Pour le troisième terme, on calcule

$$\begin{aligned}\int_E (|f_n|\mathbf{1}_{|f_n|>K} + |f|\mathbf{1}_{|f|>K})\mathbf{1}_{|f_n-f|>M} &\le \int_E |f_n|\mathbf{1}_{|f_n|>K} + \int_E |f|\mathbf{1}_{|f|>K} \\ &\le \frac{K}{\phi(K)}\Big\{\int_E \phi(|f_n|) + \int_E \phi(|f|)\Big\} \to 0.\end{aligned}$$

En combinant les informations ci-dessus, on conclut que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On suppose désormais $f_n \to f$ en mesure. D'après la réciproque d'Egorov, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. et donc $f_{n_k} \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$. Maintenant, si ce n'était pas toute la suite (f_n) qui convergeait alors on aurait une sous-suite $(f_{q(n)})$ telle que $\|f_{q(n)} - f\|_1 \ge \delta > 0$ pour tout n et toujours $f_{q(n)} \to f$ en mesure. Nous venions de dire que ce dernier point implique qu'il existe une sous-suite $(f_{q(n_k)})$ telle que $\|f_{q(n_k)} - f\|_1 \to 0$, ce qui est absurde. □

5 Exercices

Exercice 5.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui est de Cauchy au sens de la convergence en mesure, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) = 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite qui converge p.p. (Ind. On pourra s'inspirer de la preuve de la complétude de $\mathcal{L}^1$ qui sera établie dans un prochain chapitre).*

Exercice 5.2. *Pour une mesure μ finie (puis σ-finie), montrer l'équivalence entre les quatre théorèmes fondamentaux de convergence :*

(1) Lemme de Fatou ;

(2) Théorème de convergence monotone de Beppo-Lévi ;

(3) Théorème de convergence monotone (version $\mathcal{L}^1$) ;

(4) Théorème de convergence dominée.

- *Observer que dans le cours, on a démontré $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$ et $(2) \Rightarrow (3)$.*
- *Pour montrer l'implication $(3) \Rightarrow (4)$, on pourra considérer une suite (f_n) vérifiant les hypothèses du théorème de convergence dominée et introduire la suite $\varphi_n := \sup_{k\ge n} |f_k - f| \searrow 0$.*
- *Pour montrer l'implication $(4) \Rightarrow (2)$, on pourra montrer, en revenant à la définition de l'intégrale dans $\mathscr{M}_+$, que pour tout $\varphi \in \mathscr{M}_+$, on a*

$$\int \varphi d\mu = \sup_{M\in\mathbb{R}_+} \int (\varphi \wedge M) d\mu.$$

On pourra alors considérer une suite (f_n) vérifiant les hypothèses du théorème de convergence monotone et commencer par établir que $(f_n \wedge M)$ converge dans $\mathcal{L}^1$ pour tout $M \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 5.3. *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables. Discuter les implications entre les convergences suivantes*

(1) $f_n \to 0$ uniformément à ε près (au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \subset E$ tel que $\mu(E\backslash A) < \varepsilon$ et $f_n \to 0$ uniformément sur A) ;

(2) $f_n \to 0$ μ-p.p. ;

(3) $f_n \to 0$ au sens de $\mathcal{L}^1$;

(4) $f_n \to 0$ *en mesure ;*

lorsque E *est quelconque, lorsque* E *est de mesure finie, à extraction d'une sous-suite et sous l'hypothèse supplémentaire* $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$.

Indications :

- *dans le cas général, montrer que* (1) $\Rightarrow$ (2) *et* (3) $\Rightarrow$ (4) *;*
- *à extraction d'une sous-suite, montrer que* (3) $\Rightarrow$ (2) *et* (4) $\Rightarrow$ (2) *;*
- *sous l'hypothèse supplémentaire* $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$, *montrer que* (2) $\Rightarrow$ (3) *et* (4) $\Rightarrow$ (3) *;*
- *lorsque* E *est de mesure finie, montrer que* (2) $\Rightarrow$ (1) *et* (2) $\Rightarrow$ (4).