Université Paris-Dauphine **2022-2023**
Cours de "Intégrale de Lebesgue et Probabilités" Septembre 2022

Chapitre 1 - Tribu, Fonction mesurable

Table des matières

Sont écrites en bleu les parties particulièrement importantes (à relire plusieurs fois !), en violet les parties traitées en TD (résultats à connaître pour sa culture) et en rouge les parties hors programme.

1 Tribu

Dans cette section, on note E un ensemble quelconque et on introduit la notion de tribu, qui est une classe d'ensembles de parties de E, c'est-à-dire une classe de sous ensembles de $\mathscr{P}(E)$, à la base de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Dans la suite, l'ensemble E sera typiquement un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^d$ ou un espace métrique [1].

Définition 1.1. *On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur E un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $E \in \mathscr{A}$;
(ii) $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$;
(iii) $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable :

$$A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}.$$

On appelle "espace mesurable" la donnée d'un couple $(E, \mathscr{A})$. On dit que $A \subset E$ est $\mathscr{A}$-mesurable (ou simplement mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $A \in \mathscr{A}$.

Remarque et exemple 1.2. *Montrer que si $\mathscr{A}$ est une tribu alors*
(iv) $\emptyset \in \mathscr{A}$ (et cette hypothèse peut remplacer (i) dans la définition d'une tribu) ;
(v) $\mathscr{A}$ est stable par réunion finie : $(A_k \in \mathscr{A},\, 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}$;
(vi) $\mathscr{A}$ est stable par intersection finie : $(A_k \in \mathscr{A},\, 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{A}$;
(vii) si $A, B \in \mathscr{A}$ alors $A \backslash B := A \cap B^c, A \,\Delta\, B := (A \cup B) \backslash (A \cap B) \in \mathscr{A}$.

1. voir la section 3. Tribu borélienne et la section 5. Compléments

(viii) $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable, plus grande limite et plus petite limite, soit donc pour une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{A}$, on a

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n,\ \limsup A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k,\ \liminf A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathscr{A}.$$

(ix) L'hypothèse "$\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable" peut remplacer (iii) dans la définition d'une tribu.
(x) La dénombrabilité joue un rôle fondamentale en théorie de l'intégrale de Lebesgue : changer l'hypothèse (iii) de "stabilité par réunion dénombrable" par une hypothèse de "stabilité par réunion finie" (comme pour une "algèbre") ou de "stabilité par réunion quelconque" (comme pour une "topologie") altérerait totalement la théorie. A plusieurs reprises, nous utiliserons quelques éléments de théorie des ensembles et de dénombrabilité. Essentiellement, nous aurons à utiliser le résultat suivant : une réunion "au plus dénombrable" d'ensembles "au plus dénombrables" est "au plus dénombrable". On rappelle qu'un ensemble E est "au plus dénombrable" s'il existe une application injective $\varphi : E \to \mathbb{N}$. Pour plus de détails, nous renvoyons aux notes sur des "éléments de la théorie des ensembles et cardinalité".

Exemples 1.3. *1) $\{\emptyset, E\}$ est une tribu, appelée tribu grossière.*

2) $\mathscr{P}(E)$ est une tribu, appelée tribu discrète. Cette tribu est très utilisée lorsque E est discret (fini ou dénombrable) mais ne l'est pas lorsque E n'est pas dénombrable (par exemple si $E = \mathbb{R}$).

3) Une intersection (d'un nombre quelconque) de tribus est une tribu.

4) Une réunion de tribus n'est pas une tribu en général. Considérer par exemple $E := \{0,1,2\}$ et la réunions des tribus $\{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$ et $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$.

5) Si $\{A_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une partition de E, c'est-à-dire, si $E = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$, alors

$$\mathscr{A} := \Big\{\bigcup_{i\in J} A_i;\ J \subset \mathbb{N}\Big\}$$

est une tribu. En particulier, $\mathscr{A}$ est en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ est définie par $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, si $\forall A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathscr{B}$. Pour cette relation d'ordre, $\mathscr{P}(E)$ est la tribu la plus grande (ou plus fine) et $\{\emptyset, E\}$ est la tribu la plus petite (ou plus grossière).

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(E)$ quelconque. L'ensemble de parties*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathscr{A}\ \text{tribu} \supset \mathcal{E}} \mathscr{A}$$

est une tribu, c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

La preuve consiste à observer que $\sigma(\mathcal{E})$ est bien défini puisque que l'ensemble $\{\mathscr{A}\ \text{tribu} \supset \mathcal{E}\}$ est non vide (puisqu'il content $\mathscr{P}(E)$!) et qu'une intersection quelconque de tribus (contenant une partie d'ensembles) est encore une tribu (contenant la même partie d'ensembles) en vérifiant les trois propriétés définissant une tribu. Il est à noter que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ implique $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}')$ et que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ si (et seulement si !) $\mathcal{E}$ est une tribu.

La tribu $\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ engendrée par deux parties $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ est également notée $\sigma(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Lorque $\mathcal{E}_i = \mathcal{A}_i$ est une tribu, on note $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$. En général, $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \neq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Exemples 1.5. *1) La tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est appelée tribu borélienne et notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Nous reviendrons sur cet exemple fondamental dans la section 3.*

2) On définit $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La tribu borélienne $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et les ensembles de la forme $[-\infty, a[$, $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$.

3) Soient $(E,\mathscr{A})$, $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. On appelle "rectangle" de $E\times F$ tout ensemble de la forme $A\times B$ avec $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{B}$. L'ensemble des "rectangles" est noté

$$\mathscr{A}\times\mathscr{B} := \{A\times B,\, A\in\mathscr{A},\, B\in\mathscr{B}\}.$$

La tribu engendrée par l'ensemble des "rectangles" est notée

$$\mathscr{A}\otimes\mathcal{B} := \sigma(\mathscr{A}\times\mathscr{B}).$$

On dit que $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ est la tribu produit de $E\times F$.

Proposition 1.6. *Soient E un ensemble, $(F,\mathscr{B})$ un ensemble mesurable et $f:E\to F$ une application. Alors l'ensemble de parties $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur E, où on définit*

$$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B),\, B\in\mathcal{F}\}\subset\mathscr{P}(E), \quad si \quad \mathcal{F}\subset\mathscr{P}(F).$$

On l'appelle tribu image réciproque de $\mathscr{B}$ par f ou tribu engendrée par f, et on la note $\sigma(f)$. On observe que $f^{-1}(\mathcal{F})\subset f^{-1}(\mathcal{F}')$ si $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'\subset\mathscr{P}(F)$.

Preuve de la Proposition 1.6. On se rappelle que

$$f^{-1}(F)=E, \quad E\backslash f^{-1}(B)=f^{-1}(F\backslash B), \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i), \tag{1}$$

pour tout $B,B_i\in\mathscr{P}(F)$. Il est alors immédiat que l'ensemble de parties $f^{-1}(\mathscr{B})$ vérifie les trois axiomes d'une tribu si $\mathscr{B}$ est elle-même une tribu. $\square$

Exemples 1.7. *1) Soient E un ensemble, $(F,\mathscr{B})$ un ensemble mesurable et $\mathcal{F}$ une famille d'applications de E dans $(F,\mathscr{B})$. On note $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\{\sigma(f),\, f\in\mathcal{F}\}$.*

2) Soient $(E,\mathscr{A})$ un espace mesurable et $F\subset E$. L'ensemble des traces sur F des éléments de $\mathscr{A}$, soit donc

$$\mathscr{B} := \{A\cap F,\, A\in\mathscr{A}\},$$

est une tribu sur F. Cela est une conséquence du fait que c'est l'image réciproque des éléments de $\mathscr{A}$ par l'application identité $i:F\to E$. On peut également en faire une preuve directe à partir des trois propriétés définissant une tribu.

Proposition 1.8. *Soient $(E,\mathscr{A})$ et $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. Alors*

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma(\mathcal{G})=\sigma(\pi_E,\pi_F),$$

où on définit la famille de parties $\mathcal{G}$ par

$$\mathcal{G} := (\mathscr{A}\times\{F\})\cup(\{E\}\times\mathscr{B}) := \{A\times F,\, A\in\mathscr{A}\}\cup\{E\times B,\, B\in\mathscr{B}\}$$

et les projections canoniques $\pi_E : E\times F\to E$, $(x,y)\mapsto x$, et $\pi_F : E\times F\to F$, $(x,y)\mapsto y$.

Preuve de la Proposition 1.8. Par définition, on a $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ où $\mathcal{C}:=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, est la famille des rectangles élémentaires. On observe que $\mathcal{G}\subset\mathcal{C}\subset\sigma(\mathcal{G})$, la deuxième inclusion provenant du fait que pour $A\times B\in\mathcal{C}$ on peut écrire $A\times B=(A\times F)\cap(E\times B)\in\sigma(\mathcal{G})$, ce qui permet de démontrer la première identité. On observe maintenant que $\pi_E^{-1}(A)=A\times F$ et $\pi_F^{-1}(B)=E\times B$ pour tout $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$, ce qui se traduit en $\mathscr{A}\times F=\sigma(\pi_E)$, $E\times\mathscr{B}=\sigma(\pi_F)$, et permet de démontrer la deuxième identité. $\square$

Proposition 1.9. *Soient $(E,\mathscr{A})$ un ensemble mesuré, F un ensemble et $f:E\to F$ une application. Alors l'ensemble de parties $f^{\uparrow}(\mathscr{A})$ est une tribu sur F, où on définit*

$$f^{\uparrow}(\mathcal{E}) := \{B\subset F; f^{-1}(B)\in\mathcal{E}\}\subset\mathscr{P}(F), \quad si \quad \mathcal{E}\subset\mathscr{P}(E).$$

On l'appelle tribu induite (ou image) de $\mathscr{A}$ par f. On observe que $f^{\uparrow}(\mathcal{E})\subset f^{\uparrow}(\mathcal{E}')$ si $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'\subset\mathscr{P}(E)$.

La preuve découle immédiatement des identités rappellées en (1).

Remarque 1.10. *1) Attention à la notation $f^{\uparrow}(\mathscr{A})$ qui ne désigne donc pas*

$$\{f(A);\, A \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{P}(F).$$

Ce dernier ensemble de parties n'est pas une tribu en général lorsque $\mathscr{A}$ est une tribu.
2) Pour des ensembles E, F, des sous-ensembles et une application $f : E \to F$, on a toujours

$$\mathcal{F} \subset f^{\uparrow}(f^{-1}(\mathcal{F})), \quad si\ \mathcal{F} \subset \mathscr{P}(F),$$
$$f^{-1}(f^{\uparrow}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{E}, \quad si\ \mathcal{E} \subset \mathscr{P}(E).$$

En effet, d'après les définitions introduites dans les Propositions 1.6 et 1.9, on a

$$f^{\uparrow}(f^{-1}(\mathcal{F})) := \{C \subset F;\, f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{F})\} := \{C \subset F;\, \exists\, B \in \mathcal{F},\ f^{-1}(C) = f^{-1}(B)\} \supset \mathcal{F},$$
$$f^{-1}(f^{\uparrow}(\mathcal{E})) := \{f^{-1}(B); B \in f^{\uparrow}(\mathcal{E})\} := \{f^{-1}(B); B \subset F, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}.$$

Les inclusions ne sont pas nécessairement des égalités comme on peut le voir avec les exemples suivants. Exemple 1 : $E := \{a\}$, $F := \{b_1, b_2, b_3\}$, $f(a) := b_1$, $\mathcal{F} := \{\{b_2\}\}$, de sorte que $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{\emptyset\}$ et donc $f^{\uparrow}(f^{-1}(\mathcal{F})) = \{\emptyset, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_2, b_3\}\}$. Exemple 2 : $E := \{a_1, a_2\}$, $F := \{b\}$, $f(a_i) := b$, $\mathcal{E} := \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$, de sorte que $f^{\uparrow}(\mathcal{E}) = \{\{b\}\}$ et donc $f^{-1}(f^{\uparrow}(\mathcal{E})) = \{\{a_1, a_2\}\}$.

Lemme 1.11 (fondamental)**.** *Soit $f : E \to F$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(F)$. On a $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ (est une tribu de E).*

Preuve du Lemme 1.11. L'ensemble de parties $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ est une tribu de E d'après la Proposition 1.6 et $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \supset f^{-1}(\mathscr{C})$, donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$.
Définissons $\mathscr{B} := f(\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})))$, qui est une tribu de F d'après la Proposition 1.9. D'après la première inclusion de la Remarque 1.10-2), on a $\mathscr{C} \subset f^{\uparrow}(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f(\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))) = \mathscr{B}$ et donc $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$. D'après la deuxième inclusion de la Remarque 1.10-2), on a $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$, qui est la deuxième inclusion requise. $\square$

Exercice 1.12. *Considérons $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables ainsi que deux ensembles de parties $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(E)$ et $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(F)$ tels que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{F})$. Montrer que l'on a*

$$\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) = \sigma((\mathcal{E} \times F) \cup (E \times \mathcal{F})) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B},$$

avec $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ défini dans l'Exemple 1.5 et $\mathcal{E} \times F$, $E \times \mathcal{F}$ définis dans la Proposition 1.8.
(Ind. Pour l'inclusion directe, on procédera comme dans la preuve de la Proposition 1.8. Pour l'inclusion inverse, on pensera à établir la relation $\mathscr{A} \times F = \pi_E^{-1}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathcal{E} \times F)$ et une identité semblable en utilisant la projection π_F).

2 Algèbre, semi-algèbre, classe monotone

Il s'avère qu'il est souvent difficile d'expliciter tous les éléments d'une tribu sur un ensemble E (lorsque E n'est pas dénombrable). Les tribus pourrons alors être définies à partir de classes d'éléments générateurs (algèbre, semi-algèbre) que nous introduisons dans cette section.

Définition 2.1. *On appelle algèbre (de Boole sur E/de parties de E) un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $E \in \mathscr{A}$;
(ii) $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$;
(iii) $\mathscr{A}$ est stable par réunion : $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

Exercice 2.2. *Montrer que si $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties alors*
(iv) $\emptyset \in \mathscr{A}$ (et cela est équivalent à supposer (i));
(v) $\mathscr{A}$ est stable par réunion finie : $(A_k \in \mathscr{A},\ 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}$;
(vi) $\mathscr{A}$ est stable par intersection finie : $(A_k \in \mathscr{A},\ 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{A}$;
(vii) si $A, B \in \mathscr{A}$ alors $A \backslash B, A \,\Delta\, B := (A \cup B) \backslash (A \cap B) \in \mathscr{A}$.

Exemples 2.3. *1) Une tribu est une algèbre de parties. La réciproque est fausse. Nous en donnons un premier exemple ci-dessous (cf. Exemples 2.5). La différence entre algèbre et tribu (σ-algèbre) est la condition de stabilité des réunions finies vs réunions dénombrables, le σ de σ-algèbre faisant donc référence à la dénombrabilité.*

2) Une intersection (d'un nombre quelconque) d'algèbres est une algèbre.

3) La classe des unions finies d'intervalles quelconques (fermés, ouverts, semi-ouverts) est une algèbre.

Proposition 2.4. *On appelle semi-algèbre un ensemble de parties $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $\emptyset, E \in \mathcal{F}$;
(ii) $\mathcal{F}$ est stable par intersection : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
(iii) A^c est une union finie d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.
Alors

$$\mathscr{A} := \{\text{unions finies d'éléments de } \mathcal{F}\}$$

est une algèbre de parties de E. En particulier, $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Preuve de la Proposition 2.4. Il suffit de montrer que $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire. Pour $A \in \mathscr{A}$, on écrit

$$A^c = \Big(\bigcup_{i=1}^n F_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c = \bigcap_{i=1}^n \Big(\bigcup_{j_i=1}^m G_{ij_i}\Big) = \bigcup_{1 \le j_1, \dots, j_n \le m} \Big(\bigcap_{i=1}^n G_{ij_i}\Big)$$

avec $F_i, G_{ij} \in \mathcal{F}$. □

Exemples 2.5. *1) Une algèbre est une semi-algèbre. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple développé ci-dessous.*

2) On appelle intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]-\infty, b[$, $-\infty < a \le b \le +\infty$. La famille $\mathcal{F}$ des intervalles semi-fermés de $\mathbb{R}$ forme une semi-algèbre. Pour cela, on pourra observer en particulier que le complémentaire d'un intervalle semi-fermé est soit un intervalle semi-fermé, soit l'union de deux intervalles semi-fermés. Par exemple $\mathbb{R} \backslash [a, b[=]-\infty, a[\cup [b, \infty[$.

3) La famille $\mathcal{F}$ définie en 2) n'est pas une algèbre puisque qu'elle n'est évidemment pas stable par passage au complémentaire, ni par réunion finie. L'ensemble $\mathscr{A}$ des réunions finies d'intervalles semi-fermés est une algèbre d'après la Proposition 2.4.

4) L'algèbre $\mathscr{A}$ définie en 3) n'est pas une tribu puisqu'elle n'est pas stable par réunion dénombrable. Par exemple, l'intervalle ouvert $]0, +\infty[= \cup_n [1/n, +\infty[$ n'appartient pas à $\mathscr{A}$. Les tribus $\sigma(\mathcal{F})$ et $\sigma(\mathscr{A})$ coïncident avec la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, soit donc $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

5) Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux algèbres de parties. Appelons "ensemble élémentaire" toute union finie de "rectangles élémentaires" définis dans l'exemple 1.5-3). La famille des rectangles élémentaires forme une semi-algèbre. Pour vérifier cette affirmation, on observera par exemple

$$\begin{aligned}(A \times B)^c &= [(A \times F) \cap (E \times B)]^c = (A^c \times F) \cup (E \times B^c) \quad (\textit{union non disjointe}) \\ &= (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c) \quad (\textit{union disjointe})\end{aligned}$$

La famille des ensembles élémentaires forme donc une algèbre d'après la Proposition 2.4.

Exercice 2.6. *Soit $(E_i, \mathscr{A}_i)$, $1 \le i \le n$, une famille finie d'algèbres de parties. Appelons « pavés » les sous-ensembles $A_1 \times \cdots \times A_n$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$, avec $A_i \in \mathscr{A}_i$, $1 \le i \le n$. L'ensemble des réunions finies de pavés élémentaires forme une algèbre sur $E_1 \times \cdots \times E_n$. On appelle tribu produit de $E_1 \times \cdots \times E_n$ la tribu engendrée par les pavés, on la note $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$.*

Définition 2.7. *Soit E un ensemble. Une classe monotone $\mathcal{M}$ sur E est un ensemble de parties de E qui est stable par limite monotone (donc par limite croissante et limite décroissante). Pour $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ un ensemble quelconque de parties, on note $\mathcal{M}(\mathscr{C})$ la plus petite classe monotone contenant $\mathscr{C}$ (ou classe monotone engendrée par $\mathscr{C}$). Celle-ci est encore définie par*

$$\mathcal{M}(\mathscr{C}) := \bigcap_{\mathcal{M} \text{ classe monotone} \supset \mathscr{C}} \mathcal{M}.$$

Remarque 2.8. *Soit E un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ un ensemble de parties. $\mathscr{A}$ est une tribu si, et seulement si, c'est une algèbre et une classe monotone. Pour montrer l'inclusion réciproque, on observera que pour toute suite (A_n) de $\mathcal{A}$, on peut écrire*

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_N B_N, \quad B_N := \bigcup_{1 \le n \le N} A_n,$$

avec (B_N) une suite croissante.

Lemme 2.9 (des classes monotones)**.** *Soit E un ensemble et $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ une algèbre de parties. La tribu et la classe monotone engendrées par $\mathscr{C}$ sont égales, soit donc $\sigma(\mathscr{C}) = \mathcal{M}(\mathscr{C})$.*

La façon quasi systématique d'utiliser ce résultat est la suivante : en particulier, si $\mathscr{M}$ est une classe monotone telle que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M} \subset \sigma(\mathscr{C})$, alors $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C})$. En effet, dans ce cas on a

$$\sigma(\mathscr{C}) = \mathcal{M}(\mathscr{C}) \subset \mathcal{M}(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \subset \sigma(\mathscr{C}).$$

Ce lemme (ou celui énoncé dans la remarque 2.11) permet de simplifier grandement la preuve de beaucoup de résultats futurs : il suffira de vérifier une propriété sur une petite classe d'ensembles (que l'on pourra décrire explicitement) pour que la même propriété soit vraie sur toute une tribu.

Preuve du Lemme 2.9. On a évidemment $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

(i) On a $E \in \mathcal{M}$ puisque $E \in \mathscr{C}$.

(ii) Définissons l'ensemble de parties $\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{M};\ A^c \in \mathcal{M}\}$, de sorte que $\mathscr{C} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Si A est une limite monotone d'éléments de $\mathcal{M}'$, disons par exemple $A = \cup A_n$, $A_n \in \mathcal{M}'$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $A \in \mathcal{M}$ puisque $\mathcal{M}$ est une classe monotone et $A^c = \cap A_n^c \in \mathcal{M}$, puisque $A_n^c \in \mathcal{M}$, $A_{n+1}^c \subset A_n^c$ et $\mathcal{M}$ est une classe monotone. On a donc $A \in \mathcal{M}'$. Cela prouve que $\mathcal{M}'$ est une classe monotone, et donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. On a ainsi montré que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ est stable par passage au complémentaire.

(iii) Pour $A \in \mathscr{C}$, définissons l'ensemble de parties $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M};\ A \cup B \in \mathcal{M}\}$, de sorte que $\mathscr{C} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$. Si B est une limite monotone d'éléments de $\mathcal{M}_A$, disons $B = \cup B_n$, $(B_n) \uparrow$, $B_n \in \mathcal{M}_A$, alors $A \cup B = \cup (A \cup B_n) \in \mathcal{M}$ puisque $A \cup B_n \in \mathcal{M}$, $(A \cup B_n) \uparrow$ et $\mathcal{M}$ est une classe monotone. Cela prouve que $B \in \mathcal{M}_A$, donc $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone et donc enfin $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{M}$. On a ainsi montré que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$ est stable par union, soit donc $A \cup B \in \mathcal{M}$, pour tout $A \in \mathscr{C}$, $B \in \mathcal{M}$. On recommence, en prenant maintenant $A \in \mathcal{M}$ et définissant $\mathcal{M}_A$ de la même manière. La même preuve implique que $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$. On a ainsi démontré que $A \cup B \in \mathcal{M}$, pour tout $A, B \in \mathcal{M}$.

Ensembles, ces trois propriétés montrent que $\mathcal{M}$ est une une algèbre de parties, ce qui suffit pour conclure d'après la remarque précédente.

$\square$

Exercice 2.10. *Notons $\mathscr{A}$ la famille des unions finies de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (sans condition de fermeture et ouverture). Montrer que c'est une algèbre mais pas une tribu. (Ind. Considérer l'ensemble de Cantor). Plus simplement, $\mathscr{B}$ la famille des unions finies de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont rationnelles est une algèbre de $\mathbb{R}$, mais pas une tribu.*

Remarque 2.11. *Une variante du lemme 2.9 est la suivante. On dit que $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(E)$ est un π-système si $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que c'est un λ-système si*

1. *$E \in \mathcal{C}$;*
2. *$\mathcal{C}$ est stable par différence croissante : $B \backslash A \in \mathcal{C}$ si $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$;*
3. *$\mathcal{C}$ est stable par limite croissante.*

On peut montrer (en adaptant la preuve du lemme des classes monotones) que si $\mathcal{C}$ est un π-système alors $\sigma(\mathcal{C})$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$.

3 Tribu borélienne

Nous présentons dans cette section la tribu borélienne (ou de Borel) associée à la structure topologique d'un espace métrique (E, d) général et en particulier à la structure topologique (usuelle) de $\mathbb{R}^d$. En pratique, toutes les tribus que l'on rencontre sont des tribus boréliennes.

Définition 3.1. *On appelle "ouvert de $\mathbb{R}$" tout ensemble de la forme*

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[, \quad J \subset \mathbb{N}, \quad a_j < b_j \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On appelle topologie de $\mathbb{R}$ l'ensemble $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2. *Soit E un ensemble. On appelle "topologie" $\mathscr{T}$ sur E tout ensemble de parties tel que*
(i) $\emptyset, E \in \mathscr{T}$;
(ii) $O_1, O_2 \in \mathscr{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}$;
(iii) $O_i \in \mathscr{T}$, $i \in I$, I quelconque, $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathscr{T}$.
On appelle "ouverts" les éléments de $\mathscr{T}$. On appelle "fermé" le complémentaire d'un ouvert.

Définition 3.3. *Soit E un ensemble. On dit que $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance sur E si*
(i) $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$;
(ii) $\forall\, x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
(iii) $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$.
On dit alors que (E, d) est un espace métrique. Si $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) := \|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$, définit une distance.
On appelle boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble

$$B(a, r) := \{x \in E;\ d(x, a) < r\}.$$

On appelle ouvert de E tout ensemble $\mathcal{O} \subset E$ vérifiant

$$\forall\, a \in \mathcal{O}, \quad \exists\, r > 0; \quad B(a, r) \subset \mathcal{O}.$$

On peut montrer (voir la preuve de la Proposition 3.9) que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les unions d'intervalles ouverts, de sorte que cette définition est cohérente avec la Définition 3.1.

Proposition 3.4. *L'ensemble des ouverts $\mathscr{T}_E$ d'un espace métrique (E, d) forme une topologie. La topologie de $\mathbb{R}$ (définie ci-dessus) est une topologie. C'est la topologie associée à la distance définie à partir de la valeur absolue (qui est une norme). La topologie de $\mathbb{R}^d$ est la topologie associée à une distance définie à partir d'une norme de $\mathbb{R}^d$. Les normes étant équivalentes, elles induisent toutes la même topologie.*

Définition 3.5. *On appelle "tribu borélienne" sur un espace métrique E la tribu $\mathscr{B}(E)$ engendrée par les ouverts de E. On appelle "tribu borélienne" sur $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un borélien est un ensemble appartenant à la tribu borélienne.*

Remarque 3.6. *Dans la suite de ce cours, les tribus considérées seront toutes des tribus boréliennes associées à espace métrique* (E, d)*. En particulier, les topologies seront "à base dénombrable d'ouverts", c'est-à-dire que pour tout* $x \in E$*, il existe une suite* $(\mathcal{O}_n)$ *telle que pour tout ouvert* $U \ni x$*, il existe (au moins) un* $\mathcal{O}_n$ *tel que* $x \in \mathcal{O}_n \subset U$*. Dans un espace métrique, il suffit de poser* $\mathcal{O}_n := B(x, 1/n)$*.*

Proposition 3.7. *La tribu borélienne* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}$ *est également la tribu engendrée par*
(i) les fermés ; (ii) les intervalles (les intervalles ouverts, fermés, semi-fermés) ;
(iii) les demi-droites $[x, +\infty[$*, (iv) les demi-droites* $]x, +\infty[$*,*
(v) les demi-droites $]-\infty, x[$ *; (vi) les demi-droites* $]-\infty, x]$ *;*
où dans (iii)–(vi) x *parcourt* $\mathbb{R}$ *ou une partie* D *dense de* $\mathbb{R}$*. De plus, les singletons, donc également les parties dénombrables de* $\mathbb{R}$*, sont boréliens.*

Eléments de preuve de la Proposition 3.7 : On observe que

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \geq 1}]-\infty, a_n], \quad]-\infty, b] = \bigcap_{n \geq 1}]-\infty, b_n[,$$

avec $a_n \nearrow a$ et $b_n \searrow b$. □

Définition 3.8. *Dans* $\bar{\mathbb{R}}$*, on appelera tribu borélienne (sans chercher à décrire la topologie de* $\bar{\mathbb{R}}$*) et on notera* $\mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$*, la tribu engendrée par les ensembles* $]a, +\infty]$*,* $a \in \mathbb{R}$*. La tribu* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *est alors la tribu trace de* $\mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 3.9. *La tribu borélienne* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *est la tribu engendrée par*
(i) les boules ouvertes ; (ii) les pavés $P = I_1 \times \cdots \times I_d$*,* I_k *intervalle ;*
(iii) les demi-espaces, i.e. les ensembles de la forme $\Delta = I_1 \times \cdots \times I_d$*,* $I_k = \mathbb{R}\ \forall\, k \neq i$*,* $I_i = [a_i, +\infty[$*.*

Ce dernier résultat dit en particulier que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve de la Proposition 3.9 : On peut se ramener à considérer des pavés ouverts et des demi-espaces ouverts par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de la Proposition 3.7. On remarque également que
- les demi-espaces sont des pavés et que les pavés sont des intersections de demi-espaces ;
- les cubes (pavés avec des I_k de même longueur) sont des pavés et les pavés sont des unions dénombrables de cubes ;
- les boules ouvertes pour la norme infinie sont les cubes ;
- les cubes ouverts, pavés ouverts, demi-espaces ouverts et boules ouvertes sont des ouverts.

En notant $\mathscr{C}_k$, les différentes familles d'ensembles, avec $\mathscr{C}_{i,\infty}$ définie à partir de la norme infinie, on a clairement $\sigma(\mathscr{C}_{i,\infty}) = \sigma(\mathscr{C}_{ii}) = \sigma(\mathscr{C}_{iii}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et également $\sigma(\mathscr{C}_{i,N}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, avec $\mathscr{C}_{i,N}$ définie à partir d'une norme N quelconque. Finalement, en notant D une famille dénombrable et dense de $\mathbb{R}^d$ (par exemple $D := \mathbb{Q}^d$), on observe que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $y \in D$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $x \in B(y, r) \subset \mathcal{O}$, où $B(y, r)$ désigne une boule ouverte au sens d'une norme N. On note $\mathcal{Z}$ ce sous-ensemble de $D \times \mathbb{Q}_+^*$. On a donc $x \in \cup_{(y,r)\in\mathcal{Z}} B(y, r)$ et donc $\mathcal{O} = \cup_{(y,r)\in\mathcal{Z}} B(y, r)$, le terme de droite étant une union dénombrable de boules ouvertes. Cela implique $\mathcal{O} \in \sigma(\mathscr{C}_{i,N})$ et donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathscr{C}_{i,N})$, pour toute norme N. □

Enonçons deux résultats qui généralisent les précédents. Les preuves assez semblables sont laissées en exercice.

Proposition 3.10. *Sur un espace métrique séparable* (E, d)*, la tribu borélienne* $\mathscr{B}(E)$ *est également la tribu engendrée par*
(i) les boules ouvertes ; (ii) les boules ouvertes de rayon $r \in \mathbb{Q}_+^*$ *; (iii) les fermés.*

Proposition 3.11. *Si* (E, d) *est un espace métrique et* $F \subset E$*, alors les boréliens de* (F, d) *sont les traces sur* F *des boréliens de* E*. Si* E *et* F *sont deux espaces métriques séparables alors* $\mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(F) = \mathscr{B}(E \times F)$*.*

Élements de preuve de la Proposition 3.11 : On présente uniquement une ébauche de la preuve de $\mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(F) = \mathscr{B}(E \times F)$. En procédant comme dans la preuve de la Proposition 3.9 et en utilisant notamment la propriété des espaces métriques considérés d'être à base dénombrable d'ouverts, on montre que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $E \times F$, il existe deux suites d'ouverts (U_n) de E et (V_n) de F telles que

$$\mathcal{O} = \bigcup U_n \times V_n,$$

ce que l'on peut écrire sous la forme $\mathscr{T}_{E\times F} = \mathscr{T}_d(\mathscr{T}_E \times \mathscr{T}_F)$ (la topologie de $E \times F$ est la topologie formée des unions dénombrables de rectangles ouverts de $E \times F$). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(E \times F) &= \sigma(\mathscr{T}_{E\times F}) = \sigma(\mathscr{T}_d(\mathscr{T}_E \times \mathscr{T}_F)) = \sigma(\mathscr{T}_E \times \mathscr{T}_F) \\ &= \sigma(\mathscr{T}_E) \otimes \sigma(\mathscr{T}_F) = \mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(F),\end{aligned}$$

où on a utilisé l'Exercice 1.12 pour justifier la quatrième égalité. □

4 Fonction mesurable

Nous introduisons la classe des fonctions (mesurables) que nous considérerons dans toute la suite de ce cours.

Définition 4.1. *Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ des espaces mesurables et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est mesurable (ou $\mathscr{A} - \mathscr{B}$ mesurable) si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ pour tout $B \in \mathscr{B}$, c'est-à-dire, si $\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$. On dit que f est borélienne si $\mathscr{B}$ est une tribu borélienne.*

En pratique, on sera amené à considérer des fonctions à valeurs dans F avec
(1) - F espace mesurable quelconque ;
(2) - F espace métrique (séparable et complet, i.e. polonais) muni de sa tribu borélienne ;
(3) - $F = \bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^d$;
(4) - $F = \mathbb{R}$.
Pour alléger la présentation nous considérerons essentiellement les deux cas extrêmes (le plus general (1) et le plus particulier (4)). Néanmoins, les résultats valables dans le cas réel sont souvent généralisables (de manière assez simple) au cas (2) et (3). Dans les applications, nous pourrons donc avoir recours à ces généralisations.

Exemples 4.2. *(i) Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable. L'application $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbf{1}_A(x) := 1$ si $x \in A$, $:= 0$ si $x \notin A$, est borélienne. En effet, pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathbf{1}_A^{-1}(B) = E$ si $0, 1 \in B$, $\mathbf{1}_A^{-1}(B) = A$ si $1 \in B$, $0 \notin B$, $\mathbf{1}_A^{-1}(B) = A^c$ si $0 \in B$, $0 \in B$, $\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \emptyset$ si $0, 1 \notin B$. Ainsi $\sigma(f) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ et donc $\sigma(f) \subset \mathscr{A}$ ssi $A \in \mathscr{A}$.*
(ii) Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ des espaces mesurables, $A \in \mathscr{A}$, $b, c \in F$. L'application $f := b\mathbf{1}_A + c\mathbf{1}_{A^c}$ est mesurable, où plus précisément $f : E \to F$, $f(x) = b$ si $x \in A$, $f(x) = c$ si $x \in A^c$. En particulier, les applications constantes sont mesurables.

Proposition 4.3. *Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$, $(G, \mathscr{C})$ des espaces mesurables et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des fonctions mesurables. Alors $g \circ f : E \to G$ est $\mathscr{A} - \mathscr{C}$ mesurable. Les projections canoniques $\pi_E : E \times F \to E$ et $\pi_F : E \times F \to F$ sont $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} - \mathscr{A}$ et $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} - \mathscr{B}$ mesurables.*

Les preuves des deux assertions sont immédiates (appliquer les définitions).

Définition 4.4. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une fonction $f : E \to F$ est continue si*

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, d_E(y, x) < \delta \Rightarrow d_F(f(y), f(x)) < \varepsilon, \tag{1}$$

ou de manière équivalente, en notant $\mathscr{T}_E$ et $\mathscr{T}_F$ les ouverts (ou topologies) de E et F, si

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{T}_E, \qquad \forall \mathcal{O} \in \mathscr{T}_F. \tag{2}$$

Il est en effet clair que (2)$\Rightarrow$(1), puisque (2) appliqué à $\mathcal{O} := B_F(f(x),\varepsilon)$ nous dit que $x \in f^{-1}(B_F(f(x),\varepsilon)) \in \mathscr{T}_E$, donc qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B_E(x,\delta) \subset f^{-1}(B_F(f(x),\varepsilon))$, ce qui est précisément l'assertion (1). Inversement, supposons (1), donnons nous $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathscr{T}_F$ et montrons que l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathscr{T}_E$. Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ de sorte que $f(x) \in \mathcal{O}$, et donc également $B_F(f(x),\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. D'après l'assertion (1), on a alors $f(B_E(x,\delta)) \subset B_E(f(x),\varepsilon) \subset \mathcal{O}$, soit donc $B_E(x,\delta) \subset f^{-1}(B_E(f(x),\varepsilon)) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$. Cela prouve bien $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{T}_E$, et donc termine la preuve de (2).

Proposition 4.5. *Soient $(E,\mathscr{A})$, $(F,\mathscr{B})$ mesurables, $f : E \to F$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(F)$ tel que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. Alors f est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$. En particulier, toute fonction continue (définie sur des espaces métriques) est borélienne. En particulier, toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ est borelienne si $\{f > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha,+\infty])$ est mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Preuve de la Proposition 4.5 : Grâce au Lemme 1.11, on a

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset \mathscr{A},$$

ce qui signifie que f est mesurable.

D'après la Définition 4.4 et la remarque qui la suit, si $f : (E,d_E) \to (F,d_F)$ est une fonction continue, alors $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{T}_E \subset \mathscr{B}(E)$ pour tout $\mathcal{O} \in \mathscr{T}_F$. On conclut que f est borélienne en utilisant la première partie de la proposition et le fait que $\sigma(\mathscr{T}_F) = \mathscr{B}(F)$. $\square$

Proposition 4.6. *Soient $(E,\mathscr{A})$, $(F_i,\mathscr{B}_i)_{i=1,2}$ des espaces mesurables et $f : E \to F_1 \times F_2$. On note $\pi_i : F_1 \times F_2 \to F_i$ la projection canonique, i.e. $\pi_i((x_1,x_2)) = x_i$. Alors f est mesurable si, et seulement si, les $\pi_i \circ f$ sont mesurables pour $i = 1,2$. En particulier, toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ est borelienne si, et seulement si, $\Re e f$ et $\Im m f$ sont boreliennes.*

Preuve de la Proposition 4.6. Le sens direct est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3 et du fait que les projections canoniques $\pi_i : (F_1 \times F_2, \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2) \to (F_i,\mathscr{B}_i)$ sont mesurables. Afin de démontrer l'implication réciproque, on définit l'ensemble

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{G}_1 := \{B_1 \times F_2,\, B_1 \in \mathscr{B}_1\}, \quad \mathcal{G}_2 := \{F_2 \times B_2,\, B_2 \in \mathscr{B}_2\},$$

qui satisfait $\sigma(\mathcal{G}) = \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$ d'après la Proposition 1.8. Pour tout $B \in \mathcal{G}$, on a $B \in \mathcal{G}_i$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, et donc $f^{-1}(B) = (\pi_i \circ f)^{-1}(B_i)$ est mesurable, où B_i est défini comme ci-dessus. On a donc $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathscr{A}$. On conclut grâce à la Proposition 4.5. $\square$

Proposition 4.7. *Soient $(E,\mathcal{A})$ et $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables, $A \in \mathscr{A}$, $b \in F$ et $f : A^c \to F$ une fonction mesurable (pour la tribu trace de $\mathscr{A}$ sur A^c). Alors la fonction $g : E \to F$ définie par $g(x) := f(x)$ si $x \notin A$, $g(x) := b$ si $x \in A$, est mesurable.*

Preuve de la Proposition 4.7 : On prend $B \in \mathscr{B}$ et on observe que $g^{-1}(B) = A \cup f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ si $b \in B$, $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ si $b \notin B$. $\square$

Proposition 4.8. *Si f et g sont boreliennes à valeurs dans $\mathbb{R}$ (éventuellement dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$), $p > 0$, alors $|f|^p$, $f^{-1}\,\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}$, $f+g$, fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont boreliennes. En particulier, une combinaison linéaire de fonctions boreliennes est borelienne.*

Preuve de la Proposition 4.8 : Ce sont des composées de fonctions mesurables. En particulier, la fonction $\varphi(z) = 1/z$ si $z \neq 0$, $\varphi(z) = 0$ si $z = 0$, est borélienne. $\square$

Proposition 4.9. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.*
Soit (f_n) une suite de fonctions boréliennes réelles qui est partout convergente, alors la fonction $\lim f_n$ est mesurable.
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui est convergente sur une partie mesurable C et soit g une fonction mesurable quelconque, alors la fonction f définie par $f(x) = \lim f_n(x)$ si $x \in C$, $f(x) = g(x)$ si $x \notin C$ est mesurable.

Preuve de la Proposition 4.9 : De $\{\sup f_n > \alpha\} = \cup\{f_n > \alpha\}$ et $\{\inf f_n \geq \alpha\} = \cap\{f_n \geq \alpha\}$, on déduit que $\sup f_n$ et $\inf f_n$ sont boréliennes. Par conséquent, $\limsup f_n = \inf \sup f_n$ et $\liminf f_n = \sup \inf f_n$ sont également boréliennes. Enfin, si (f_n) est partout convergente, alors $\lim f_n = \limsup f_n = \liminf f_n$ est borélienne. Pour démontrer le dernier point, on utilise la Proposition 4.7. □

Exercice 4.10. *Soit (f_n) une suite de fonctions boréliennes réelles. Montrer que l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $\lim f_n(x)$ existe est mesurable. (Ind. Utiliser les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$).*

Définition 4.11. *Soient un ensemble mesurable $(E, \mathscr{A})$ et $F = \mathbb{R}$ ($\bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$). Une fonction $f : E \to F$ est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et si elle est mesurable. Une fonction étagée s'écrit donc*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{A_i}, \quad a_i \in F, \quad A_i \in \mathscr{A}. \tag{3}$$

Il existe toujours une (unique) "écriture canonique" qui consiste à prendre les (a_i) distincts et les (A_i) non vides et formant une partition de E. On note $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E, \mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(E, \mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

En effet, si f est étagée dont les valeurs sont $a_1, \dots, a_n$ (par définition distincts) alors les $A_i := f^{-1}(a_i) \in \mathscr{A}$ sont disjoints et f prend la forme (3). Réciproquement (dans le cas réel pour simplifier), si f est de la forme (3) sans que les a_i soient nécessairement distincts ni que les A_i soient nécessairement disjoints, alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{J \in \mathcal{I}_\alpha} \Big(\bigcap_{j \in J} A_j \Big) \in \mathscr{A}, \quad \mathcal{I}_\alpha := \{J \subset \{1, \dots, n\}, \sum_{j \in J} a_j > \alpha\},$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, de sorte que f est mesurable.

Une preuve alternative est la suivante. D'une part, pour $A \in \mathscr{A}$, la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable puisque $\sigma(\mathbf{1}_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\} \subset \mathscr{A}$. On en déduit immédiatement que toute fonction étagée est mesurable puisque combinaison linéaire de fonctions mesurables. Enfin, une fonction étagée f s'écrit sous la forme (3) (avec les A_i non nécessairement disjoints) et prend donc ses valeurs dans l'ensemble fini $\{\sum \theta_i a_i; \, \theta_i = 0, 1\}$.

Proposition 4.12. *Les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($\bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$) sont les fonctions qui sont partout limites de suite de fonctions étagées. Pour une fonction bornée, on peut supposer la limite uniforme. Pour une fonction positive, on peut supposer les fonctions étagées positives et la limite croissante.*

Preuve de la Proposition 4.12. - Si $f : (E, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ est positive et bornée, $0 \leq f(x) \leq M$, $\forall \, x \in E$, pour tout $n \geq 0$ et $k \in \{0, \dots 2^n - 1\}$, on définit l'ensemble mesurable

$$E_{n,k} := \{x \in E; \frac{k}{2^n} M \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} M\} = f^{-1}\big(\big[\frac{k}{2^n} M, \frac{k+1}{2^n} M\big[\big),$$

ceux-ci forment une partition de E, puis on définit la fonction étagée positive

$$f_n := \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{k}{2^n} M \mathbf{1}_{E_{n,k}}.$$

La suite (f_n) est croissante et converge uniformément vers f. On a en effet d'une part

$$0 \leq \big(f - f_n\big) \mathbf{1}_{E_{n,k}} = \big(f - \frac{k}{2^n} M\big) \mathbf{1}_{E_{n,k}} \leq \frac{M}{2^n}, \quad \forall \, k,$$

ce qui prouve que $f_n \to f$ uniformément. De même, pour tout n et k, on observe que $E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1}$, on a

$$\begin{aligned} f_{n+1}\mathbf{1}_{E_{n,k}} &= \frac{2k}{2^{n+1}} M\mathbf{1}_{E_{n+1,2k}} + \frac{2k+1}{2^{n+1}} M\mathbf{1}_{E_{n+1,2k+1}} \\ &\geq \frac{k}{2^n} M\big(\mathbf{1}_{E_{n+1,2k}} + \mathbf{1}_{E_{n+1,2k+1}}\big) = f_n \mathbf{1}_{E_{n,k}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que (f_n) est croissante.

- Pour une fonction f positive, on définit f_n de la même manière, et plus précisément en prenant

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{E_{n,k}} + n\mathbf{1}_{f\geq n},$$

en prenant $M = 1$ dans la définition de $E_{n,k}$, de sorte que (f_n) est encore croissante et converge vers f.

- Pour une fonction f bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$, on décompose $f = f_1 - f_2$ avec $f_j \geq 0$ et bornées, et on utilise la première étape.

- Pour une fonction f quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$, on décompose $f = f_1 - f_2$ avec $f_j \geq 0$, et on utilise la deuxième étape.

- Le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$ se traite de manière similaire, en décomposant $f = R + i\,I$ en partie réelle et parie imaginaire ou en décomposant $f = f_1 + \cdots + f_d$ selon les coordonnées, $f_i = g_1 e_1 \dots g_d e_d$, g_i à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(e_1, \dots, e_d)$ base de $\mathbb{R}^d$. □

Terminons par un résultat qui aura une grande importance dans les chapitres consacrés aux probabilités et aux variables aléatoires.

Théorème 4.13. *Soient $f : E \to (F, \mathscr{B})$ et $g : E \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ deux applications. Il y a équivalence entre*

(i) g est $\sigma(f)$ mesurable ;

(ii) il existe $\varphi : (F, \mathscr{B}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable telle que $g = \varphi \circ f$.

Preuve du Théorème 4.13. L'implication (ii) ⇒ (i) n'est rien d'autre que la Proposition 4.3 puisque f est $\sigma(f)$-mesurable. Montrons l'implication réciproque. On commence par supposer que g est étagée

$$g = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathbf{1}_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ distincts}, \ A_i \text{ disjoints.}$$

Comme g est $\sigma(f)$-mesurable, on a $A_i = g^{-1}(\{a_i\}) \in \sigma(f)$, et donc $A_i := f^{-1}(B_i)$ pour un certain $B_i \in \mathscr{B}$. On a $\mathbf{1}_{A_i}(x) = \mathbf{1}_{B_i}(f(x))$, et donc

$$g = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathbf{1}_{B_i} \circ f = \varphi \circ f, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathbf{1}_{B_i},$$

avec $\varphi : F \to \mathbb{R}$ mesurable. Dans le cas général d'une fonction $g : (E, \sigma(f)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, on sait que g est limite simple d'une suite (g_n) de fonctions étagées et $\sigma(f)$ mesurables. D'après la première étape, il existe $\varphi_n : F \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $g_n = \varphi_n \circ f$. On note $C \in \mathscr{B}$ l'ensemble des $y \in F$ pour lesquels $\lim \varphi_n(y)$ existe (dans $\mathbb{R}$). Pour tout $y \in F$, on pose

$$\varphi(y) := \lim \varphi_n(y) \text{ si } y \in C, \ := 0 \text{ si } y \notin C.$$

On sait que la fonction $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ainsi définie est mesurable. Pour tout $x \in E$, on a $g(x) = \lim g_n(x) = \lim \varphi_n(f(x))$, de sorte que $f(x) \in C$ et donc

$$\varphi(f(x)) = \lim \varphi_n(f(x)) = g(x),$$

ce qui donne la représentation cherchée $g = \varphi \circ f$. □

5 Compléments

• On utilise couramment quatre "structures" en Analyse. De la plus forte à la plus générale, ces structures sont celles associées aux espaces suivants :
- espace (vectoriel) normé (ex : $\mathbb{R}^d$) ;
- espace métrique (ex : boules et sphères de $\mathbb{R}^d$) ;
- espace topologique (permet de définir les fonctions continues) ;
- espace mesuré (permet de définir les fonctions mesurables).

Il convient d'ajouter deux propriétés de "régularité" définies dans un espace métrique :
- séparabilité (il existe un sous ensemble D dénombrable et dense, par exemple $D = \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) ;
- complétude (les suites de Cauchy convergent).

Le bon cadre pour développer la théorie de la mesure et des probabilités est celui des espaces polonais, c'est-à-dire, les espaces métriques, séparables et complets. Il est néanmoins possible de définir une partie de la théorie dans le cadre (plus abstrait et plus général) des espaces mesurables.

• On peut montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est de même cardinal que $\mathbb{R}$. Son cardinal ne coincide donc pas avec celui de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ qui lui est strictement supérieur à celui de $\mathbb{R}$.

Plus généralement, soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. S'il existe une partie infinie dénombrable de la tribu $\mathcal{A}$ qui engendre celle-ci, alors $\mathcal{A}$ a la puissance du continu (une tribu est soit finie, soit non dénombrable).

• On a

$$\{\sup_k s_k > a\} = \bigcup_k \{s_k > a\}, \quad \bigcup_k \{s_k \geq a\} \subset \{\sup_k s_k \geq a\} \text{ (en general } \neq).$$

Comme contre exemple, on peut prendre $s_k : E \to \mathbb{R}$, $s_k(x) = -1/k$, $a = 0$, de sorte que $\{\sup s_k \geq 0\} = E$ et $\{s_k \geq 0\} = \emptyset$). De même, on a

$$\{\inf_k s_k \geq a\} = \bigcap_k \{s_k \geq a\}, \quad \{\inf_k s_k > a\} \subset \bigcap_k \{s_k > a\} \text{ (en general } \neq).$$

Comme contre exemple, on peut prendre $s_k : E \to \mathbb{R}$, $s_k(x) = 1/k$, $a = 0$, de sorte que $\{\inf s_k > 0\} = \emptyset$ et $\{s_k > 0\} = E$). On en déduit par exemple

$$\{\limsup s_k > a\} \subset \limsup\{s_k > a\} \quad \text{et} \quad \limsup\{s_k \geq a\} \subset \{\limsup s_k \geq a\}$$