Ecole Normale Supérieure **2005-2006**

Examen d'Analyse Fonctionnelle et EDP

Jeudi 8 juin 2006 de 9h à 12h

Exercice 1 (Baire et Hahn-Banach). Soit E un espace de Banach et $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe s.c.i.. On pose $D(\varphi) = \{x \in E \,/\, \varphi(x) < +\infty\}$ et on suppose que $\operatorname{Int} D(\varphi) \neq \emptyset$.

1) - Montrer que φ est localement majorée sur $\operatorname{Int} D(\varphi)$ au sens suivant: pour tout $x \in \operatorname{Int} D(\varphi)$, il existe r_x^1, $C_x \in (0,\infty)$ tels que $\varphi(y) \le C_x$ pour tout $y \in B(x, r_x^1)$. En déduire que φ est localement bornée, puis localement Lipschitzienne sur $\operatorname{Int} D(\varphi)$ au sens suivant: pour tout $x \in \operatorname{Int} D(\varphi)$, il existe $r_x^2 \in (0,\infty)$ tel que φ est bornée et même Lipschitzienne sur $B(x, r_x^2)$.

On définit le sous-différentiel de φ, noté $\partial\varphi$, par

$$(f \in \partial\varphi(x) \subset E') \Longleftrightarrow (\varphi(x) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \langle f, y - x\rangle \le \varphi(y) - \varphi(x), \forall y \in E).$$

Le sous-différentiel est donc une application $\partial\varphi : D(\varphi) \to \mathcal{P}(E')$ l'ensemble des parties de E'.

2) - Soit $x \in \operatorname{Int} D(\varphi)$. Montrer que $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$ et que $\partial\varphi(x)$ est un ensemble convexe. Montrer que si de plus $\partial\varphi(x)$ est réduit à un seul élément, alors φ est Gâteaux-différentiable en x et $\partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}$.

Exercice 2 (Compacité dans $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$). On fixe $N \ge 2$.

1) - Montrer que l'injection $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte.

On désigne par $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ le sous-espace vectoriel des fonctions radiales de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que l'on définit comme étant les fonctions $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$\langle u, \varphi \circ R\rangle = \langle u, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ \forall\, R \text{ rotation.}$$

2) - Montrer que $C^1_{rad,c}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ est un fermé de $H^1(\mathbb{R}^N)$ et que pour tout $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ il existe $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $u(x) = f(|x|)$ p.p dans $\mathbb{R}^N$ et

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = c_N \int_0^\infty (|f(r)|^2 + |f'(r)|^2)\, r^{N-1}\, dr.$$

3) - Montrer que pour $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$|u(x)|^2 \le C\, \frac{\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{N-1}} \qquad p.p.\,\text{dans}\,\mathbb{R}^N.$$

4) - En déduire que pour $p \in \mathbb{R}_+$, $2 < p + 1 < 2^*$, on a

$$\forall\, R > 0 \qquad \int_{|x|\ge R} |u(x)|^{p+1}\, dx \le C\, R^{-\frac{(p-1)\,(N-1)}{2}},$$

et que l'injection $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ est compacte.

5) - Montrer que la fonctionnelle

$$J(v) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v(x)|^2 + m\,|v(x)|^2)\,dx, \quad m > 0,$$

définie sur $S := \{v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \|v\|_{p+1} = 1\}$ y atteint son minimum. En déduire l'existence d'une solution à l'équation (préciser le sens)

$$-\Delta u + m\,u = u^p, \ \ u \geq 0, \ \ u \not\equiv 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

Exercice 3 (Equation cinétique). Pour $N \geq 1$, on considère l'équation

$$f + v \cdot \nabla_x f = g \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2N}). \tag{1}$$

1) - Montrer que si $f = f(x,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ et $g = g(x,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ satisfont (1) alors

$$\forall\, p \in [1,\infty] \qquad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}. \tag{2}$$

Pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}\psi \subset B(0,R)$, on définit

$$\rho(x) = \rho_{f,\psi}(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)\,\psi(v)\,dv,$$

et pour $h = h(x,v)$, on note $\hat{h}(\xi,v) = \mathcal{F}_x(h(.,v))(\xi)$ la transformation de Fourier dans la variable x.
2) - Montrer que si $f = f(x,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ et $g = g(x,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ satisfont (1) alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{\rho}(\xi) = \int_{|v\cdot\xi|\leq 1} \hat{f}(\xi,v)\,\psi(v)\,dv + \int_{|v\cdot\xi|\geq 1} \frac{\hat{g}(\xi,v)}{1 + i\,v\cdot\xi}\,\psi(v)\,dv.$$

En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$|\hat{\rho}(\xi)| \leq \frac{C_R}{|\xi|^{1/2}}\,\|\psi\|_{L^\infty}\,(\|\hat{f}(\xi,.)\|_{L^2} + \|\hat{g}(\xi,.)\|_{L^2}).$$

3) - Montrer que pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ il existe une unique solution $f \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ à l'équation (1) et qu'on a la borne (2) avec $p = 2$. Montrer alors que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ il existe une unique solution $f \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ à l'équation (1) et qu'on a la borne (2) avec $p = 1$.
4) - En déduire que pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ on a

$$\|\rho\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})}).$$

5) - Montrer que si (g_n) est une suite de $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ compactes pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ et si (f_n) est la suite de solutions de (1) associée, alors $(\rho_{f_n,\psi})$ est une suite de $L^1(\mathbb{R}^N)$ compacte pour la topologie forte.

Exercice 4 (Equation de Poisson avec donnée L^1). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, et $f \in L^1(\Omega)$. On cherche à résoudre l'équation

$$-\Delta u = f \ \text{ dans } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \tag{3}$$

1) - Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v>0}\, \nabla v = \mathbf{1}_{v\geq 0}\, \nabla v$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $\nabla u = 0$ p.p. sur $\{x \in \Omega,\ u(x) = k\}$. En déduire également que si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne et C^1 par morceaux (en nombre fini) avec $T(0) = 0$ on a $T(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla T(v) = T'(v)\nabla v$.

2) - Soit une suite $f_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ telle que $f_\varepsilon \to f$ dans $L^1(\Omega)$ fort. Montrer qu'il existe une solution (en quel sens?) au problème

$$-\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

3) - Soit $Z_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire définie par $Z_k(s) = 0$ si $s \in [0, 2^k]$, $Z_k(s) = s - 2^k$ si $s \in [2^k, 2^{k+1}]$, $Z_k(s) = 2^k$ si $s \geq 2^{k+1}$ et $E_\varepsilon^k := \{x \in \Omega,\ 2^k \leq |u_\varepsilon(x)| \leq 2^{k+1}\}$. Montrer que $Z_k(u_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \int_{E_\varepsilon^k} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \|f\|_{L^1}\, 2^k.$$

4) - En déduire d'une part que pour tout $q \in]1, N/(N-1)[$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q \leq \|f\|_{L^1}^{q/2} \sum_k 2^{k\, q/2}\, \mathrm{mes}(E_\varepsilon^k)^{1-q/2}.$$

5) - En déduire d'autre part que $\mathrm{mes}(E_\varepsilon^k) \leq C\, 2^{-k\, 2^*/2}$.

6) - Montrer enfin qu'il existe une constante $C = C(\Omega, \|f_\varepsilon\|_{L^1})$ telle que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q \leq C.$$

7) - Conclure à l'existence d'une solution au problème (3). Préciser le sens.

Exercice 5 (Espaces d'Orlicz et interpolation). Soit $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe strictement croissante de classe C^2 telle que $\Lambda(0) = \Lambda'(0) = 0$ et il existe une constante $C_2 \in (0, \infty)$ telle que $\Lambda(2\, u) \leq C_2\, \Lambda(u)$ pour tout $u > 0$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On définit

$$L^\Lambda := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable},\ \Lambda(|f|) \in L^1(\Omega)\}$$

et la norme de jauge:

$$\forall\, f \in L^\Lambda, \qquad \|f\|_{L^\Lambda} := \inf\Big\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \Lambda\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)\, dx \leq 1\Big\}.$$

1) - Montrer que $(L^\Lambda, \|\|_{L^\Lambda})$ est un espace vectoriel normé et que $L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^\Lambda(\Omega)$.

2) - Soit $T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ un opérateur linéaire continu de norme d'opérateur N_1 et tel que $T(L^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega)$. Montrer que $T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ est continu, on note N_∞ la norme d'opérateur associée.

3) - Montrer de plus que $T : L^\Lambda(\Omega) \to L^\Lambda(\Omega)$ est continu et que la norme d'opérateur associée satisfait $N_\Lambda \leq \max(N_1, N_\infty)$.