Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP Stéphane Mischler
Première année de Master FIMFA

Eléments de correction de l'examen du Lundi 4 juin 2007

Exercice 1. Calculer $\mathcal{F}(\delta_0)$ et en déduire $\mathcal{F}(1)$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))$ est impaire. Montrer que $x\,\mathrm{Vp}(1/x) = 1$ et en déduire $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))$.

Correction de l'exercice 1. La définition directe de la TF montre que $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$. Comme $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\delta) = 2\,\pi\,\delta_0$. Pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on note $\psi^\vee(x) = \psi(-x)$ et pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on définit $T^\vee$ par $\langle T^\vee, \varphi\rangle = \langle T, \varphi^\vee\rangle$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ il est clair que $\mathcal{F}(\varphi)^\vee = \mathcal{F}(\varphi^\vee)$ de sorte que $\mathcal{F}(T)^\vee = \mathcal{F}(T^\vee)$ également pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De par la définition par dualité de $\mathrm{Vp}(1/x)$ on a

$$\langle \mathrm{Vp}(1/x), \varphi^\vee\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = -\langle \mathrm{Vp}(1/x), \varphi\rangle \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

ce qui prouve que $\mathrm{Vp}(1/x)$ est impaire, et donc également que $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))$ est impaire. De même, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle x\,\mathrm{Vp}(1/x)), \varphi\rangle = \langle \mathrm{Vp}(1/x), x\,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,dx = \langle 1, \varphi\rangle,$$

ce qui prouve que $x\,\mathrm{Vp}(1/x) = 1$. De ce qui précède on déduit

$$i\,A' := i\,\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))' = \mathcal{F}(x\,\mathrm{Vp}(1/x)) = \mathcal{F}(1) = 2\,\pi\,\delta_0.$$

On a donc $A(\xi) = -2\,i\,\pi\,(H(\xi) + C)$ où H est la fonction de Heaviside et C est une constante à déterminer. Comme on sait que A est impaire, on trouve que $C = -1/2$, et finalement $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))(\xi) = -\pi\,i\,\xi/|\xi|$.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach. On dit que $S = (S_t)_{t\ge0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires continus de E si i) $S_t : E \to E$ est un opérateur linéaire continu $\forall\,t \ge 0$; ii) $S_0 = Id_E$, $S_{s+t} = S_s \circ S_t$; iii) $\forall x \in E$, $\lim_{t\to0^+} S_t\,x = x$.

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que $\|S_t\| \le M$, $\forall t \in [0, \delta]$.

2) En déduire qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$, tel que $\|S_t\| \le M\,e^{\omega\,t}$, $\forall t \ge 0$.

Correction de l'exercice 2. 1) On définit $X_n := \{x \in E;\ \forall\,t \in [0, 1/n]\ \|S_t\,x\| \le 2\}$. L'ensemble X_n est fermé (par i) et $\cup X_n = E$ (par iii). Appliquant le lemme de Baire, on déduit qu'il existe n_0 tel que $\mathrm{int}\,X_{n_0} \ne \emptyset$. On note $\delta := 1/n_0$. Il existe donc $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que $\forall\,t \in [0, \delta]$, $\forall\,y \in B_E$ on a $\|S_t(x_0 + r\,y)\| \le 2$, soit encore $\|S_t(y)\| \le (1/r)\,(2 + \|S_t(x_0)\|) \le 4/r =: M$.

1bis) Une preuve alternative est de supposer par l'absurde que 1) n'a pas lieu. Il existe donc une suite de temps (t_n) telle que $t_n \to 0$ et $\sup_n \|S_{t_n}\|_{\mathcal{L}(E)} = \infty$. Or d'autre part, $S_{t_n}\,x \to x$ pour tout $x \in E$, ce qui implique d'après un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus que $\sup_n \|S_{t_n}\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty$, et la contradiction.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on écrit $t = t' + [t/\delta]\,\delta$ avec $t' \in [0, \delta)$ de sorte que (par ii)

$$\|S_t\| \le \|S_{t'}\|\,\|S_\delta\|^{[t/\delta]} \le M\,M^{[t/\delta]} \le M\,e^{\frac{\ln M}{\delta}\,t}.$$

Problème 3. (Théorème de Tykhonov et applications)

On rappelle le théorème (de Brouwer) suivant. Soit C un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^N$ et soit $\psi : C \to C$ une fonction continue. Alors ψ admet un point fixe: il existe $\bar{x} \in C$ tel que $\psi(\bar{x}) = \bar{x}$.

1) - Soit E un espace de Banach réflexif séparable, soit C un convexe fermé borné non vide de E et soit $\varphi : C \to C$ une fonction continue au sens de la convergence faible de E. On souhaite montrer (théorème de Tykhonov) que φ possède un point fixe.

a) Montrer qu'il existe (f_n) une suite dense de $B_{E'}$. On définit

$$d : C \times C \to \mathbb{R}_+, \quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle f_n, y - x \rangle|.$$

Pourquoi est-ce une distance? On désigne par $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r associée à d. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(e_i)_{i \in I}$ telle que $C \subset \cup_{i \in I} B(e_i, \varepsilon/2)$.

b) - Soit C_ε l'enveloppe convexe des $(e_i)_{i \in I}$ et soit φ_ε la fonction définie par

$$\varphi_\varepsilon(x) := \sum_{i \in I} \theta_i(x)\, e_i \quad \text{où} \quad \theta_i(x) = \frac{q_i(x)}{\sum_{j \in I} q_j(x)}, \quad q_i(x) := \max(\varepsilon - d(\varphi(x), e_i), 0).$$

Montrer qu'il existe $\bar{x}_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $\varphi_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon) = \bar{x}_\varepsilon$.

c) - En remarquant que $d(\varphi(x), e_i) \le \varepsilon$ lorsque $\theta_i \neq 0$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ on a $|\langle f_k, \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x) \rangle| \le 2^k\, \varepsilon$. En déduire qu'il existe $\bar{x} \in C$ tel que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

2) - Dans cette question Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f(s)| \le C\,(1 + |s|^{p/q})\ \forall s \in \mathbb{R}$, avec $C, p, q \in [1, \infty)$. Montrer que $u \mapsto f(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

b) Soit $C := \{v \in H^1_0(\Omega),\ \|v\|_{H^1} \le M\}$ pour $M > 0$ à fixé. On suppose de plus que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit φ la fonction définie par $u = \varphi(v)$ est la solution de

$$-\Delta u = f(v) \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \partial\Omega. \tag{1}$$

b1) - Montrer que $\varphi : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ (et on précisera le sens de la solution définie ci-dessus) et que φ est continue au sens de la convergence faible de $H^1_0(\Omega)$.

b2) - Montrer qu'il existe M tel que $\varphi : C \to C$.

b3) - En déduire qu'il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de l'équation non-linéaire $-\Delta u = f(u)$ dans Ω.

b4) - On suppose que f est décroissante. Montrer l'unicité de la solution obtenue ci-dessus.

3) Dans cette question on suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \ge 3$.

a) Soit f une fonction continue telle que $|f(s)| \le C\,(1 + |s|^k)\ \forall s \in \mathbb{R}$, avec $k \in [0, (N+2)/(N-2)]$. Montrer que la fonctionnelle $E : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega F(v)\, dx, \quad F(t) = \int_0^t f(s)\, ds,$$

est bien définie. Montrer que E est G-dérivable et calculer $\langle E'(u), v \rangle$ pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$.

b) On suppose de plus ici que $k \le 1$. Montrer que E possède un minimum. Retrouver le résultat de la question 2b3).

c) On suppose de plus maintenant que f est décroissante. Montrer que E est convexe, que E possède un minimum, et que celui-ci est unique. Retrouver le résultat de la question 2b4).

d) Que dire dans le cas $f = f_1 + f_2$ avec f_1 continue décroissante telle que $k_1 \leq (N+2)/(N-2)$ et f_2 continue telle que $k_2 < (N+2)/(N-2)$?

Correction du problème 3. 1a) Il existe une famille $\mathcal{F} = (f_n)$ dénombrable dense dans $B_{E'}$ car un théorème du cours dit que le dual E' d'un espace réflexif séparable est séparable. Il est clair que d vérifie les propriétés d'une distance: $d(x,y)$ est fini (car C et $B_{E'}$ sont bornés), d est positif et satisfait à l'inégalité triangulaire, enfin $d(x,y) = 0$ implique $\langle f_k, y - x\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc $\langle f, y - x\rangle = 0$ pour tout $f \in E'$ ($\mathcal{F}$ est dense dans $B_{E'}$) et enfin $x - y = 0$ par un corollaire de Hahn-Banach. La topologie induite par d est la topologie $\Sigma(E, E')$ (c'est du cours). Comme C est séquentiellement compact (puisque C est convexe fermé borné et que les boules sont séquentiellement compactes, encore du cours) et métrisable, C est compact pour la topologie faible, et donc pour la métrique d. On recouvre C par $\cup_{x \in C} B(x, \varepsilon/2)$ et on en extrait un sous-recouvrement fini. D'où $C \subset \cup_{i \in I} B(e_i, \varepsilon/2)$ avec I fini.
1b) On munit E_ε l'espace vectoriel engendré par les $(e_i)_{i\in I}$ de la norme $\|.\|$ induite par E. Alors $x \mapsto d(x, e_i)$ est continue dans $(E_\varepsilon, \|.\|)$ puisque $x \mapsto \langle f_k, x - e_i\rangle$ est continue pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et que la série converge uniformément sur C. On en déduit que φ_ε est continue. Comme par ailleurs C_ε est un convexe, fermé, borné, non vide, il en résulte par le théorème de Brouwer qu'il existe $\bar{x}_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $\varphi_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon) = \bar{x}_\varepsilon$.
1c) Il est clair que $\theta_i(x) \neq 0$ implique $\varepsilon - d(\varphi(x), e_i) > 0$ et donc $d(\varphi(x), e_i) \leq \varepsilon$. On calcule alors

$$|\langle f_k, \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\rangle| \leq \sum_{i\in I} \theta_i(x)\, |\langle f_k, \varphi(x) - e_i\rangle| \leq\leq \sum_{i\in I} \theta_i(x)\, 2^k\, d(\varphi(x), e_i) \leq 2^k\, \varepsilon.$$

Comme $\bar{x}_\varepsilon \in C$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite encore notée $(\bar{x}_\varepsilon)$ et $\bar{x} \in C$ tels que $\bar{x}_\varepsilon \rightharpoonup \bar{x}$ $\sigma(E, E')$ et donc $\varphi(\bar{x}_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi(\bar{x})$ $\sigma(E, E')$ par définition de φ. On a alors

$$|\langle f_k, \varphi(\bar{x}) - \bar{x}\rangle| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\langle f_k, \varphi(\bar{x}_\varepsilon) - \bar{x}_\varepsilon\rangle| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\langle f_k, \varphi(\bar{x}_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon)\rangle| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} 2^k\, \varepsilon = 0,$$

d'où on déduit (puisque cela est vrai pour tout k) $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.
2a) Soit $u_n \to u$ dans L^p. Par la réciproque du théorème de convergence dominée on a $u_{n_k} \to u$ p.p. et $|u_{n_k}| \leq g \in L^p$ pour une sous-suite (u_{n_k}). Ainsi $f(u_{n_k}) \to f(u)$ p.p. et $|f(u_{n_k})| \leq C\,(1+g)^{p/q} \in L^q$. Par le théorème de convergence dominée on obtient $f(u_{n_k}) \to f(u)$ dans L^q. L'unicité de la limite implique que c'est en fait toute la suite qui converge (faire un raisonnement pas l'absurde).
2b1) Pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$ on a $f(v) \in L^2(\Omega)$ et il existe donc par Lax-Milgram (et l'inégalité de Poincaré) une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de

$$-\Delta u = f(v) \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \partial\Omega$$

au sens variationnel

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega f(v)\, \varphi\, dx \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega).$$

Par l'injection compacte $H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, si $v_n \rightharpoonup v$ au sens $H^1_0(\Omega)$ faible alors si $v_n \to v$ au sens $L^2(\Omega)$ fort, donc $f(v_n) \to f(v)$ au sens $L^2(\Omega)$ (c'est la question 2a) et donc enfin $u_n = \varphi(v_n) \to u = \varphi(v)$ au sens $H^1_0(\Omega)$ fort, donc faible.
2b2) On a par inégalité de Poincaré

$$(\frac{1}{2} + \frac{C_\Omega}{2})\|u\|^2_{H^1} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2} \leq \int_\Omega f(v)\, u\, dx \leq \|f\|_{L^\infty}\, |\Omega|^{1/2}\, \|u\|_{L^2},$$

ce qui implique $\|\varphi(v)\|_{H^1_0} \leq C'_\Omega\, \|f\|_{L^\infty} =: M$ pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$.
2b3) C'est le théorème de Schauder.
2b4) Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), alors

$$\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^2\, dx = \int_\Omega (f(u_2) - f(u_1))\, (u_2 - u_1)\, dx \leq 0,$$

de sorte que $u_2 = u_1$.
3a) On remarque que $|F(t)| \le C\,(1+|t|)^{k+1}$ avec $k+1 \le 2^*$. Ainsi $|F(v)| \le C\,(1+|u|^{2^*}) \in L^1$ pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, ce qui montre que E est bien définie, et même continue d'après la question 2a). De plus, pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$h^{-1}\left(\int_\Omega F(u+h\,v) - \int_\Omega F(u) - h\int_\Omega f(u)\,v\right) =$$
$$= \int_\Omega \int_0^1 [f(u+h\,t\,v) - f(u)]\,v\,dt\,dx \to 0,$$

par convergence dominée (tout est fait pour que cela marche ...). Ainsi

$$\langle F'(u), v\rangle = \int_\Omega [\nabla u\cdot\nabla v - f(u)\,v]\,dx.$$

3b) On a

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \ge C_\Omega \|u\|^2_{L^2} - \int_\Omega C\,(1+|u|^{k+1})\,dx \ge C_1\,\|u\|^2_{L^2} - C_2 - C_3\,\|u\|^{(k+1)/2}_{L^2},$$

de sorte que $E(u) \to \infty$ lorsque $u \to \infty$ dans $H^1_0(\Omega)$ (E est coercive) et $E(u) \ge C_4\ \forall\, u \in H^1_0(\Omega)$. Soit (u_n) une suite minimisante, i.e. $E(u_n) \to I := \inf_{v\in H^1_0} E(v)$. On a donc (u_n) est bornée, et on en extrait une sous-suite toujours notée (u_n) qui converge faiblement $H^1_0(\Omega)$, donc également fortement $L^{k+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (par injection compacte $H^1_0 \subset L^2$). En passant à la limite $n \to \infty$ on obtient

$$I \le E(u) \le \liminf \|\nabla u_n\|^2_{L^2} + \lim \int_\Omega F(u_n)\,dx \le \liminf E(u_n) = I.$$

Comme u réalise le minimum de $E(u)$ c'est un point critique et on obtient

$$\int_\Omega [\nabla u\cdot\nabla v - f(u)\,v]\,dx \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega),$$

i.e. u est solution de (1).
3c) Si f est décroissante alors $-F$ est convexe et donc E est convexe comme somme de deux fonctionnelles convexes. De plus, de $-F$ convexe on tire qu'il existe $C_1 \ge 0$ telle que $(-F)(t) \ge -C_1\,(1+|t|)$. On en déduit comme dans la question 3b) que E est coercive. On peut appliquer le théorème du cours qui donne l'existence et l'unicité (car $u \mapsto \|\nabla u\|^2_{L^2}$ est strictement convexe) d'un minimum pour E. On retrouve donc le résultat de la question 2b4).

Problème 4 (Compacité par compensation). Dans tout cet exercice, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
1) Soit $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^p$ la suite définie par

$$u^\varepsilon(x) = \chi(x_1/\varepsilon)\,\lambda + (1-\chi(x_1/\varepsilon))\,\mu$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$, x_1 est la première coordonnées de x et où $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction périodique de période 1 telle que

$$\chi(t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 < t < \theta, \qquad \chi(t) = 0 \quad \text{si} \quad \theta < t < 1, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Quelle est la limite de u^ε dans $L^2(\Omega)$ faible? Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $|f(\mu)| \le C\,(1+|\mu|)$, quelle est la limite de $f(u^\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)$ faible?

2) Pour f fixée comme ci-dessus, en déduire que si l'application $u \mapsto f(u)$ est séquentiellement continue de $(L^2(\Omega))^p$ faible dans $L^2(\Omega)$ faible alors f est affine. De même, en déduire que si $p = 1$ et si l'application

$$u \mapsto \int_\Omega f(u)\, dx$$

est séquentiellement s.c.i. de $L^2(\Omega)$ faible dans $\mathbb{R}$ alors f est convexe.
3) On désigne par $\cdot$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$. Soient (v_ε) et (w_ε) deux suites de $L^2(\Omega)^2$ telles que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad (L^2(\Omega))^2 \text{ faible}, \qquad w_\varepsilon \rightharpoonup v \quad (L^2(\Omega))^2 \text{ faible}.$$

a) - On suppose de plus que (v_ε) et (w_ε) sont bornées dans $(L^\infty(\Omega))^2$. Montrer que l'on n'a pas en général $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$.
b) - On suppose de plus que (v_ε) est bornée dans $(H^1(\Omega))^2$. Montrer que l'on a alors $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$.
c) - On suppose maintenant que de plus

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} v_\varepsilon = \partial_1\, v_{\varepsilon,1} + \partial_2\, v_{\varepsilon,2} \rightharpoonup \operatorname{div} v \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ faible} \\ &w_\varepsilon = \nabla\, z_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad z_\varepsilon \to z \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Montrer que $(v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. (Ind. On pensera à effectuer une intégration par parties).
4) Pour $a \in H^1(\Omega)$ on définit

$$\det Da := \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Soit (y^ε) une suite de $(H^1(\Omega))^2$ telle que $y^\varepsilon \rightharpoonup y$ dans $H^1(\Omega)^2$. Déduire de la question 3) que

$$\det Dy^\varepsilon \rightharpoonup \det Dy \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

5) Montrer que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, régulière (disons de classe C^2) et telle que $|h(t)| \leq C(1 + |t|)$ on a pour toute suite (y_ε) de $(W^{1,4}(\Omega))^2$ telle que $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ dans $(W^{1,4}(\Omega))^2$) faible

$$\int_\Omega h(\det Dy)\, dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega h(\det Dy_\varepsilon)\, dx.$$

6) - (Questions subsidiaires*) En quoi le résultat 3c) est-il surprenant en comparaison avec le premier résultat énoncé dans la question 2)? Pour h convexe et λ matrice 2×2, la fonction $\lambda \mapsto \det \lambda$ est-elle affine? la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda) := h(\det \lambda)$ est-elle convexe? Comparer les résultats de la question 2) avec ceux des questions 4) et 5).

Correction du problème 4. 1) Pour tout rectangle $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \Omega$ on a

$$\int_\Omega \chi(x_1/\varepsilon)\, \mathbf{1}_R\, dx = (b_2 - a_2) \int_{a_1}^{b_1} \chi(x_1/\varepsilon)\, dx_1 \to \theta \int_\Omega \mathbf{1}_R\, dx.$$

On en déduit par densité des fonctions en escalier dans $L^2(\Omega)$ que $\lim u_\varepsilon = \theta\, \lambda + (1 - \theta)\, \mu$. De même, $f(u_\varepsilon) \rightharpoonup \theta\, f(\lambda) + (1 - \theta)\, f(\mu)$ puisque $f(u^\varepsilon)(x) = \chi(x_1/\varepsilon)\, f(\lambda) + (1 - \chi(x_1/\varepsilon))\, f(\mu)$.
2) Si $u \mapsto f(u)$ est continue dans L^2 faible, on a en particulier

$$f(\theta\, \lambda + (1 - \theta)\, \mu) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(u_\varepsilon) = \theta\, f(\lambda) + (1 - \theta)\, f(\mu)$$

pour tout $\theta \in (0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, de sorte que f est une fonction affine.
3a) Soient $v_\varepsilon(x) = \chi(x_1/\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_\varepsilon(x) = (1 - \chi(x_1/\varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \equiv 0$, $v := \lim v_\varepsilon = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $w := \lim w_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1-\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $v \cdot w = \theta\,(1-\theta) \neq 0$.
3b) Comme (v_ε) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on a $v_\varepsilon \to v$ L^2 fort, et donc $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$ (et même un peu mieux pas injection de Sobolev).
3c) On a $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon$ bornée L^1 par inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon\, \varphi &= \int_\Omega v_\varepsilon \cdot \nabla z_\varepsilon\, \varphi = -\int_\Omega \nabla(v_\varepsilon\, \varphi)\, z_\varepsilon = -\int_\Omega [(\operatorname{div} v_\varepsilon)\, \varphi\, z_\varepsilon + z_\varepsilon\, v_\varepsilon \cdot \nabla\varphi] \\ \longrightarrow & -\int_\Omega [(\operatorname{div} v)\, \varphi\, z + z\, v \cdot \nabla\varphi] = \int_\Omega v \cdot w\, \varphi. \end{aligned}$$

De $y^\varepsilon \rightharpoonup y$ H^1 on tire $y^\varepsilon \to y$ L^2. D'autre part, $\det Dy^\varepsilon = v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon$ avec $v_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\frac{\partial y_1^\varepsilon}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1^\varepsilon}{\partial x_1} \end{pmatrix}$ de sorte que $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$, et $w_\varepsilon = \nabla y_2^\varepsilon$. En utilisant la question 3c) on en déduit $\det Dy^\varepsilon \rightharpoonup \det Dy$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.
5) Comme maintenant $(\det Dy^\varepsilon)$ est bornée dans L^2, on en déduit que $\det Dy^\varepsilon \rightharpoonup \det Dy$ dans L^2 faible, et on conclut en remarquant que $u \mapsto \int_\Omega h(u)$ est convexe, continue de L^2 fort dans $\mathbb{R}$ (Problème 3, question 2), donc s.c.i. de L^2 faible dans $\mathbb{R}$.