Ecole Normale Supérieure **2005-2006**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP 4 mai 2006

Chapitre 6 - Opérateurs linéaires bornés

0 - Introduction.

L'étude des opérateurs linéaires dans un espace vectoriel est motivé par

- c'est un des objets les plus "simples" que l'on peut étudier et qui possède son propore intérêt pour les applications;

- lorsque l'on fait du calcul différentiel, ou plus simplement, lorsque l'on regarde des problèmes d'optimisation, de tels objets apparaissent naturellement (le théorème d'Euler dit par exemple qu'un point minimal pour une fonction différentiable annule la dérivée de cette fonction);

- lorsque l'on regarde des problèmes d'évolution linéaires (que l'on regarde pour eux-mêmes ou parce que l'on s'intéresse à la stabilité d'un point stationnaire, et donc à l'équation linéarisée autour de ce point de l'équation de départ) on est amené très naturellement à s'intéresser à des opérateurs linéaires bornés ou non bornés (on dit également à domaine).

L'étude des opérateurs linéaires peut se faire dans trois cadres fonctionnels:

- les evtlcs (ou les espaces de Fréchet),

- les espaces de Banach,

- les espaces de Hilbert.

A part le "théorème des noyaux" qui s'écrit dans le premier cadre (ou plutôt dans le cadre des espaces de distributions) et pour lequel nous renvoyons au chapitre 2, la théorie que nous présentons sera développée dans les deux derniers cadres.

On peut développer la théorie linéaire dans plusieurs cadres généraux

- les opérateurs bornés,

- les algèbres de Banach,

- les opérateurs non bornés (ou à domaine).

Nous introduisons la théorie des opérateurs bornés dans ce chapitre et introduirons les opérateurs non bornés dans le chapitre consacré aux équations d'évolution (car ils apparaîssent dans ce contexte très naturellement). La théorie des algèbres de Banach permet de présenter dans un cadre unifié l'étude des algèbres d'opérateurs et d'autres algèbres commutatives ou non commutatives telles que, par exemple, les algèbres de convolution (qui relève plus de l'analyse harmonique), nous n'aborderons pas cette théorie ici.

On peut s'intéresser à plusieurs sous-classe d'opérateurs pour lesquels la théorie générale peu aller plus ou moins loin, citons quelques exemples:

- dans un espace de Banach: projecteur, opétateur compact, opétateur positif (relativement à un cône), opétateur à indice (ou de Fredholm);

- dans un espace de Hilbert: opérateur auto-adjoint, opétateur anti-adjoint, opétateur normal, opétateur positif (relativement à un produit scalaire), opétateur auto-adjoint positif (ou $\mathcal{L}^2$), opétateur de Hilbert-Schmidt, opétateur nucléaire (ou à trace, ou $\mathcal{L}^1$).

Enfin, on s'intéressera dans ce chapitre aux problèmes suivants:

- inversibilté et le problème linéaire: $A\,u = b$;

- le problème aux valeurs propres $A\,u = \lambda\,u$ et le problème spectral.

On s'intéressera dans des prochains chapitres
- à une introduction au problème d'interpolation;
- aux opérateurs à domaine et leurs liens avec les problèmes d'évolution.

1 - Opérateur dans un espace de Banach.

On présente dans ce paragraphe des conséquences du lemme de Baire de "continuité automatique" pour un opérateur linéaire dans un espace de Banach ainsi que quelques résultats généraux sur les opérateurs inversibles et le spectre d'un opérateur. Étant donnés E et F deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$. On munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la norme d'opérateur

$$\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in B_E} \|T\,x\|_F,$$

ce qui en fait un espace de Banach. On rappelle que pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on définit son adjoint $T^* \in \mathcal{L}(F',E')$ grâce à la relation

$$\forall\, x \in E,\ \ \forall\, g \in F' \qquad \langle g, T\,x\rangle = \langle T^*\,g, x\rangle.$$

On a alors

$$\|T^*\| = \sup_{g\in B_{F'}} \|T^*\,g\| = \sup_{g\in B_{F'}}\sup_{x\in B_E} \langle T^*\,g, x\rangle = \sup_{x\in B_E}\sup_{g\in B_{F'}} \langle g, T\,x\rangle \overset{H.B.}{=} \sup_{x\in B_E} \|T\,x\| = \|T\|.$$

Théorème 1.1 (de l'application ouverte). Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une application linéaire, continue, surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $c\,B_F \subset T(B_E)$. En d'autre termes, T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.

Corollaire 1.2 (de continuité automatique). Si de plus, T est injective (donc bijective) alors T est bicontinue, i.e. T^{-1} est continue.

Preuve du Corollaire 1.2. D'après le théorème 1.1, on a $\forall\, x \in E$ tel que $T\,x \in c\,B_F$ alors $T\,x \in T(B_E)$, donc $\forall\, x \in E$ tel que $\|T\,x\| \le c$ alors $\|x\| \le 1$ (car T est injectif). On en déduit $\forall\, x \in E$ $\|x\| \le c^{-1}\,\|T\,x\|$ (puisque $T(c\,x/\|T\,x\|) \le c$). On conclut $\forall\, y \in F$, $\|T^{-1}\,y\| \le c^{-1}\,\|y\|$. ◻

Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ linéaire continu dans un espace de Banach, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:
- T est inversible (i.e. $\exists\, S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T\,S = S\,T = Id$);
- T est bijectif (et T^{-1} est continu);
- $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = E$ (et T^{-1} est continu).

Corollaire 1.3 (d'équivalence des normes). Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. S'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E \qquad \|x\|_2 \le C\,\|x\|_1 \tag{1.1}$$

alorsd les deux normes sont équivalentes.

Preuve du Corollaire 1.3. En effet, on applique le corollaire 1.1 à l'application $Id : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ qui est bijective et continue (c'est précisément ce que dit (1.1)). Cette application est donc d'inverse continue, ce qui signifie que $\forall\, x \in E$ $\|x\|_1 \le C'\,\|x\|_2$, d'où l'équivalence. ◻

Preuve du Théorème 1.1. 1ère étape: $\exists\, c > 0$ tel que $\overline{T(B_E)} \supset 2\,c\,B_F$.

On pose $X_n = n\,\overline{T(B_E)} = \overline{T(n\,B_E)}$ qui est fermé. Comme T est surjectif, on a $F = \cup X_n$. Le lemme de Baire implique qu'il existe n_0 tel que $\operatorname{int} X_{n_0} \neq \emptyset$, donc $\operatorname{int} \overline{T(B_E)} \neq \emptyset$, d'où on déduit aisément le résultat (par linéairaité). En effet, cela signifie donc $\exists\, c > 0$, $\exists\, x_0$ tels que $B_F(x_0, 4\,c) \subset \overline{T(B_E)}$. En particulier, $x_0, -x_0 \in \overline{T(B_E)}$, ce qui implique $B(0, 4\,c) = B(x_0, 4\,c) + (-x_0) \subset \overline{T(B_E)} + \overline{T(B_E)} = \overline{T B_E(0,2)}$, et la conclusion.

2ème étape: $T(B_E) \supset c\,B_F$. Soit $y \in F$ tel que $\|y\| \leq c$. On cherche $x \in B_E$ tel que $T\,x = y$. On sait d'après la première étape que $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, z \in E$, $\|z\| < 1/2$ et $y - T\,z\| < \varepsilon$. On pose $\varepsilon = c/2$ et on obtient $z_1 \in E$ tel que

$$\exists\, z_1 \in E \qquad \|z_1\| < 1/2 \quad \text{et} \quad \|y - T\,z_1\| < c/2.$$

Appliquant le même procédé à $y - T\,z_1$ (au lieu de y) et $\varepsilon = c/4$ on obtient

$$\exists\, z_2 \in E \qquad \|z_1\| < 1/4 \quad \text{et} \quad \|(y - T\,z_1) - T\,z_2\| < c/4.$$

Par récurrence on construit une suite (z_n) de E telle que

$$\|z_n\| < 1/2^n \quad \text{et} \quad \|(y - T\,z_1 - ... - T\,z_{n-1}) - T\,z_n\| < c/2^n.$$

La suite $x_n = z_1 + ... + z_n$ étant de Cauchy, elle converge vers une limite notée $x \in E$. Alors $x \in B_E$ et par continuité de T on a $y = T\,x$. ◻

Théorème 1.4 (du graphe fermé). Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si, et seulement si, le graphe $G(T)$ de T est fermé dans $E \times F$.

Preuve du Théorème 1.4. Il suffit de démontrer que $G(T)$ fermé implique T continu, la réciproque étant évidente. On considère sur E les deux normes

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|T\,x\|_F \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \|x\|_E.$$

Comme $G(T)$ est fermé, E muni de $\|.\|_1$ est un espace de Banach (le vérifier en considérant une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$!). D'autre part $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ $\forall\, x \in E$. D'après le corollaire 1.3, il existe donc $C > 0$ tel que $\|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$ $\forall\, x \in E$, ce qui signifie précisément que T est bornée. ◻

Théorème 1.5. Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:
(i) T est continue (de E fort dans F fort);
(ii) T est faiblement continue (de E faible $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$);
(iii) T est continue de E (fort) dans F faible $\sigma(F, F')$).

Remarque 1.5. L'hypothèse "T linéaire" est ici essentielle. En effet, considérons l'application non linéaire $T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^1(\mathbb{N}^*)$ définie par $Tx = (x_1^2, ..., x_k^2, ...)$ pour tout $x = (x_1, ..., x_k, ...) \in \ell^2$. Alors T est clairement continue (même Lipschitzienne sur les bornés de ℓ^2) mais n'est pas faiblement continue (puisque $\delta^{(n)}(= (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}})) \rightharpoonup 0$ au sens $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ mais $T\delta^{(n)} = \delta^{(n)} \not\rightharpoonup 0$ au sens $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ car $\langle 1, T\delta^{(n)}\rangle = 1$ $\forall\, n$).

Preuve du Théorème 1.5. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente puisque si T est continue alors pour tout $f \in F'$ on a $f \circ T \in E'$ et donc $p_f(Tx) = |\langle f, T\,x\rangle_{F',F}| = |\langle f \circ T, x\rangle_{E',E}| = p_{f\circ T}(x)$, ce qui permet de conclure puisque $(p_f)_{f\in F'}$ et $(p_g)_{g\in E'}$ définissent les topologies faibles. Idem pour l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Commençons par montrer que $G(T)$ est fermé pour la topologie $\sigma(E \times F, E' \times F')$. Une première façon est d'invoquer le théorème qui dit qu'un convexe C est fermé faible si, et seulement s'il est séquentiellement farmé faible (cela utilise Hahn-Banach). On conclut aisément puisqu'il est clair que $G(T)$ est un convexe séquentiellement fermé faible de $E \times F$. Une deuxième façon est de montrer que $G(T)^c$ est un ouvert. En effet, soit $(x, a) \in (E \times F)\backslash G(T)$. On a $a \neq Tx$. On sépare a et Tx par une forme linéaire: $\exists\, f \in F'$ telle que $\langle f, T\,x\rangle \neq \langle f, a\rangle$. On pose $\varepsilon := |\langle f, T\,x\rangle - \langle f, a\rangle|/2$, $U := \{y \in E;\ |\langle f \circ T, y - x\rangle| < \varepsilon\}$ et

$V := \{b \in F;\ |\langle f, b-a\rangle| < \varepsilon\}$. Il est alors clair que $U \times V$ est un ouvert de $E \times F$ faible, car $f \circ T \in E'$, et est inclus dans $G(T)^c$, car pour tout $(y,b) \in U \times V$ on a

$$|\langle f, T\,y - b\rangle| \geq |\langle f, T\,x - a\rangle| - |\langle f, T\,y - T\,x\rangle| - |\langle f, a-b\rangle| > 0.$$

Comme $G(T)$ est fermé faible, il est a fortiori fermé fort dans $E \times F$ et donc, par le théorème du graphe fermé, T est continue. Pour montrer (iii) $\Rightarrow$ (i) on remarque que dire que T est continue de E fort dans F faible c'est dire que pour tout $f \in F'$ il existe $C_f > 0$ tel que $|\langle f, T\,x\rangle| \leq C_f \|x\|$, et donc $f \circ T \in E'$. C'est précisément l'information que nous avons utiliser sur T pour montrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). On peut donc procéder de la même manière. ◫

On s'intéresse maintenant à l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. On note $I = Id$ l'application identité, qui est donc l'élément neutre de $\mathcal{L}(E)$. On note ST au lieu de $S \circ T$. On note $T^0 = I$. On remarque enfin que si $S,\, T \in \mathcal{L}(E)$ sont inversibles alors $S\,T$ est inversible et $(S\,T)^{-1} = T^{-1}\,S^{-1}$. On remarque également que $\|S\,T\| \leq \|S\|\,\|T\|$.

Théorème 1.6. (i) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors $I - T$ est inversible, et $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

(ii) Si T est inversible alors $T + S$ est inversible pour tout S tel que $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, et on a

$$(T+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T^{-1}\,S)^k\,T^{-1}, \qquad (T+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-1-k}\,S^k \text{ si } S \text{ et } T \text{ commutent.}$$

(iii) On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. Alors $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue, et même C^∞, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$.

Preuve du Théorème 1.6. (i) On a $(I-T)\,(I + T + ... + T^n) = (I + T + ... + T^n)\,(I-T) = I - T^{n+1}$. On passe à la limite $n \to \infty$ en remarquant que $S_n = I + T + ... + T^n$ est une suite de Cauchy donc converge vers un opérateur S, et on obtient $(I-T)\,S = S\,(I-T) = I$.
(ii) On écrit $T + S = T\,(I + T^{-1}\,S)$. Comme $\|T^{-1}\,S\| \leq \|T^{-1}\|\,\|S\| < 1$, on peut appliquer (i) à $T^{-1}\,S$ ce qui montre que $I + T^{-1}\,S$ est inversible et donc également $T + S$.
(iii) D'après (ii), pour tout $T_0 \in \mathcal{U}$ on a $B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1}) \subset \mathcal{U}$, ce qui prouve que $\mathcal{U}$ est un ouvert. En reprenant les calculs de (i) et (ii), on obtient pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$

$$T = T_0\,(I + T_0^{-1}\,(T - T_0)) \quad \text{et} \quad T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T_0^{-1}\,(T_0 - T))^k\,T_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T_0^{-1}\,T)^k\,T_0^{-1}.$$

De cette expression, on tire que $T \mapsto T^{-1}$ est localement développable en série entière donc de classe C^∞. En particulier, on lit que la différentielle de cette application est l'application $h \mapsto -T_0^{-1}\,h\,T_0^{-1}$. ◫

Définitions 1.7 (spectre, valeurs propres, ensemble résolvant). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- On appelle valeur spectrale de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda\,I$ n'est pas bijective (donc n'est pas inversible). On appelle spectre de T, on note $\mathrm{sp}(T) = \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs specrales de T.

- On appelle valeur propre de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda\,I$ n'est pas injectif (une valeur propre est donc une valeur spectrale), on note $\mathrm{VP}(T) = \sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T. On dit parfois que les valeurs propres forment le spectre ponctuel (d'où la notation). On appelle espace propre associé à la veleur propre $\lambda \in \mathrm{VP}(T)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,I) = N(T - \lambda\,I) \neq \{0\}$. On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre $\lambda \in \mathrm{VP}(T)$ la dimension de $N(T - \lambda\,I)$ et multiplicité algébrique la limite de $\dim N(T - \lambda\,I)^k$ lorsque $k \to \infty$.

- Si $\lambda\,I - T$ est injectif, $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ est dense mais distinct de E, on dit que λ appartient au spectre continu de T, on note $\sigma_c(T)$. Enfin, si $\lambda\,I - T$ est injectif et $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ n'est pas dense dans E, on dit que λ appartient au spectre résiduel de T, on note $\sigma_r(T)$.

- On appelle valeur résolvante de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda\, I$ est bijective (donc inversible). On appelle ensemble résolvant de T, on note $\rho(T)$ l'ensemble des valeurs résolvantes de T. Donc

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\; T - \lambda\, I \text{ est bijective de } E \text{ sur } E\} = \mathbb{K}\backslash\sigma(T).$$

Si $\lambda \in \rho(T)$ on note $R_\lambda = R(\lambda, T) = (\lambda\, I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ la résolvante de T.

Remarque 1.7. Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. on note $\tilde{E} = E + i\, E$ le $\mathbb{C}$-e.v. associé et on définit $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\tilde{E})$ par $\tilde{T}\, z = T\, x + i\, T\, y$ pour tout $z = x + i\, y \in \tilde{E}$, $x, y \in E$. De la sorte $\tilde{T}|_E = T$.

Lemme 1.8. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. (i) On a d'une part

$$r(T) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n};$$

la valeur $r(T)$ est appellée rayon spectrale de T. (ii) D'autre part, le spectre $\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K}$ et

$$\sigma(T) \subset B(0, r(T)) \subset B(0, \|T\|).$$

Preuve du Lemme 1.8. (i) On a $r(T) \le \liminf \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|T^{n_0}\|^{1/n_0} \le r(T) + \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on écrit $n = p_n\, n_0 + q_n$ avec $q_n \in [0, n_0 - 1]$ de sorte que

$$\|T^n\| \le \|T^{n_0}\|^{p_n}\, \|T\|^{q_n}\|.$$

De $q_n/n \to 0$ et $p_n/n \to 1/n_0$ on tire

$$\limsup \|T^n\|^{1/n} \le \|T^{n_0}\|^{1/n_0} \le r(T) + \varepsilon.$$

(ii) L'application $\phi(\lambda) = \lambda - T$ est continue de $\mathbb{K}$ dans E, donc $\rho(T) = \phi^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert et, par conséquent, $\sigma(T)$ est un fermé. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > r(T)$ et soit $r \in]r(T), |\lambda|[$. Il existe n_0 tel que $\forall\, n \ge n_0$ on ait $\|T^n\| \le r^n$ (puisque $r > r(T)$). La série $\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}\, T^n$ converge donc normalement (car $r/|\lambda| < 1$) et

$$(\lambda - T)\left(\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}\, T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}\, T^n\right)(\lambda - T) = I.$$

Donc $\lambda \in \rho(T)$ et $\rho(T) \supset B(0, r(T))^c$. Ainsi $\sigma(T) \subset B(0, r(T))$ est borné. ◻

2 - Les opérateurs compacts dans un espace de Hilbert et décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.

Définition 2.1. Un opérateur linéaire $K : E \to F$ est dit compact si $K(B_E)$ est une partie relativement compacte de F. En d'autres termes, pour toute suite bornée (x_n) de E il existe une sous-suite $(K\, x_{n_k})$ qui converge (fortement) dans F. On note $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $T \in \mathcal{K}(E)$ si $F = E$.

Définition 2.2. Etant donné un opérateur linéaire borné $T : E \to F$, on définit l'opérateur adjoint $T^* : F' \to E'$ par la relation (et cela fournit bien une définition!)

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, g \in F' \qquad \langle T^*\, g, x\rangle_{E',E} = \langle g, T\, x\rangle_{F',F}.$$

Désormais on suppose que $E = F = H$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 2.3. (i) Etant donné un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(H)$, on définit l'opérateur adjoint $T^* \in \mathcal{L}(H)$ par

$$\forall\, x,\, y \in H \qquad (T^*\, y, x) = (y, T\, x).$$

(ii) Si $F \subset H$, on note $F^\perp = \{y \in H,\ (y,x) = 0\ \forall x \in F\}$ l'ensemble orthogonal à F.

(iii) Pour $T \in \mathcal{L}(H)$ on note $N(T) = \ker T = \{x \in H,\ T\,x = 0\}$ le noyau de T et $R(T) = \mathrm{Im}\,T = \{y \in H,\ \exists x \in H,\ y = T\,x\}$ l'image de T.

Propriétés 2.4. (i) $\mathcal{K}(H)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(H)$. Si $K \in \mathcal{K}(H)$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ alors $K \circ T \in \mathcal{K}(H)$ et $T \circ K \in \mathcal{K}(H)$. Si $K \in \mathcal{K}(H)$ et $x_n \rightharpoonup x$ dans H alors $K\,x_n \to K\,x$ fortement dans H et cette proporiété caractérise les opérateurs compacts.

(ii) Pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$ il existe une suite (T_n) telle que T_n est de rang fini (i.e. $\mathrm{rg}(T_n) = \mathrm{rang}(T_n) = \dim R(T_n) < \infty$) et $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$.

(iii) $F^\perp$ est fermé. F s.e.v. implique $F^\perp$ s.e.v. F s.e.v. fermé implique $(F^\perp)^\perp = F$. On en déduit que $T \in \mathcal{L}(H)$ implique $T^{**} = T$.

(iv) On a $T \in \mathcal{K}(H)$ si, et seulement si, $T^* \in \mathcal{K}(H)$.

Preuve des Propriétés 2.4. (iii) Soit F un s.e.v. de H. D'une part, $\bar F \subset (F^\perp)^\perp$ puisque $F \perp F^\perp$. D'autre part, si $x \in (F^\perp)^\perp$ alors $x - p_{\bar F}x \in \bar F \subset (F^\perp)^\perp$ et d'autre part $(x - p_{\bar F}x, y) = 0\ \forall y \in \bar F$ (par définition de la projection), donc $x - p_{\bar F}x \in F^\perp$. On a donc

$$\|x - p_{\bar F}x\|^2 = (x - p_{\bar F}x, x - p_{\bar F}x) = 0$$

et $x = p_{\bar F}x$. Soit encore $(F^\perp)^\perp \subset \bar F$ et donc $(F^\perp)^\perp = \bar F$.
(iv) D'après le dernier point de (iii), il suffit de démontrer $T \in \mathcal{K}(H)$ implique $T^* \in \mathcal{K}(H)$. Soit (x_n) une suite de H telle que $x_n \rightharpoonup x$ dans H, et montrons que $T^*\,x_n \to T^*x$. En effet,

$$\|T^*x_n - T^*x\|^2 = (T^*x_n - T^*x, T^*(x_n - x)) = (TT^*x_n - TT^*x, x_n - x)$$

et on conclut en remarquant que $TT^*x_n \to TT^*x$ dans H.

Exercice 2.5. (i) Montrer que C est un cône convexe implique que $C^\perp$ est un cône convexe.

(ii) Soit $T : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $(T\,x)_n = a_n\,x_n$ pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$ avec (a_n) une suite donnée. Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ ssi (a_n) est bornée, $T \in \mathcal{K}(\ell^2)$ ssi $a_n \to 0$. Quel est le spectre de T?

(iii) Soit $L : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $(L\,x)_n = (x_2, x_3, ...)$ pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$. L est appelé le "Shift à gauche". Montrer que L n'est pas compact. Montrer que $R(L) = \ell^2$, $N(L) = \mathbb{R}\,(1, 0, ..., 0, ...)$.

(iii) Soit $R : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $(L\,x)_n = (0, x_1, x_2, ...)$ pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$. R est appelé le "Shift à droite". Montrer que R n'est pas compact. Montrer que $R(R) = \{x \in \ell^2,\ x_1 = 0\}$ et $N(R) = \{0\}$.

Théorème 2.6 (Alternative de Fredholm). Soit $T \in \mathcal{K}(H)$. Alors

(a) $\ker(I - T)$ est de dimension finie;

(b) $\mathrm{Im}(I - T)$ est fermé et $\mathrm{Im}(I - T) = (\ker(I - T^*))^\perp$;

(c) $\ker(I - T) = \{0\}$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(I - T) = H$;

(d) $\dim\ker(I - T) = \dim\ker(I - T^*)$.

Remarque 2.6. Soient H un espace de Hilbert, et A un opérateur linéaire continu de H dans lui-même. On se pose le problème suivant:

$$\text{pour } \ b \in H \ \text{ existe-t-il } \ x \in H \ \text{ tel que } \ A\,x = b? \tag{1}$$

En dimension finie, on sait bien résoudre ce problème. Pour cela, on regarde d'abord le problème $A\,x = 0$ qui admet une unique solution $(x = 0)$ si $\det A \neq 0$, et une infinité de solutions si $\det A = 0$ (l'ensemble des solustions est $\mathrm{Ker}\,A$ s.e.v. de dimension ≥ 1). On montre que l'on a ainsi l'alternative suivante:
- $\mathrm{Ker}\,A = \{0\}$ $\Rightarrow$ pour tout $b \in H$, (1) admet une, et une seule, solution; on a en fait (à cause d'un raisonnement sur les dimensions)

$$\mathrm{Ker}\,A = \{0\} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}\,A = H; \tag{2}$$

- $\operatorname{Ker} A \neq \{0\} \;\Rightarrow\;$ pour $b \in H$, (1) admet une solution x_0 si, et seulement si, $b \in \operatorname{Im} A$, et dans ce cas $x_0 + \operatorname{Ker} A \neq H$ est solution; de plus, la condition $b \in \operatorname{Im} A$ peut s'écire $b \perp \operatorname{Ker} A^\star \neq \{0\}$. En effet, $y \in \ker A^*$ implique $(b, y) = (Ax_0, y) = (x, A^* y) = 0$, i.e. $b \in (\ker A^*)^\perp$. Et on a $\operatorname{Im} A = \ker A^*$ à cause de la dimension de chaque s.e.v.

L'alternative de Fredholm affirme en particulier que soit

$$\forall\, f \in H, \text{ l'équation } u - T\, u = f \text{ admet une unique solution} \tag{1}$$

soit

$$\text{l'équation homogène } u - T\, u = 0 \text{ admet une solution } u \neq 0. \tag{2}$$

Dans le second cas, l'espace des solutions est de dimension fini et étant donné f, l'équation (1) admet une solution si, et seulement si, f vérifie les relations d'orthogonalité $f \in (\ker(I - T^*))^\perp$.

Preuve du Théorème 2.6. (a) Soit $H_1 := N(I-T)$. Alors $x \in B_{H_1} \subset B_H$ implique $x = T\, x \in \overline{T(B_H)}$. Donc $B_{H_1} \subset \overline{T(B_H)}$ est un compact, et par le théorème de Riesz, H_1 est de dimension finie.

(b) Montrons qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall\, x \in N(I - T)^\perp \qquad \|x - Tx\| \geq \gamma\, \|x\|. \tag{3}$$

En effet, dans le cas contraire il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in N(I-T)^\perp$, $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - Tx_n\| \leq 1/n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans H et $T\, x_n \to T\, x$ fortement dans H. On en déduit d'une part que $x_n \to Tx$ fortement, donc $x_n \to x$ fortement et donc $\|x\| = 1$, $x - Tx = 0$, ou encore $x \in N(I - T)$. On en déduit d'autre part,

$$(x_n, x) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique $\|x\|^2 = 0$ en passant à la limite $n \to \infty$, et une contradiction.

Soit maintenant (f_n) une suite de $\operatorname{Im}(I - T)$ telle que $f_n \to f$ dans H. On peut trouver $x_n \in H$ tel que $f_n = x_n - T\, x_n$ et $x_n \in N(I - T)^\perp$. En effet, on choisit $y_n \in H$ telle que $f_n = y_n - T\, y_n$ et on pose $x_n = y_n - P\, y_n$ où P désigne la projection sur le s.e.v. fermé (car de dimension finie) $N(I-T)$. En utilisant (3), on obtient

$$\|f_n - f_p\| \geq \gamma\, \|x_n - x_p\|,$$

ce qui implique $x_n \to x$ dans H fort et permet de conclure $f = x - T\, x$.

(b') On a $f \in [\operatorname{Im}(I - T)]^\perp$ ssi $(f, x - Tx) = 0\ \forall\, x \in H$ ssi $(f - T^* f, x) = 0\ \forall\, x \in H$ ssi $f - T^* f = 0$ ssi $f \in \ker(I - T^*)$. Donc $[\operatorname{Im}(I-T)]^\perp = \ker(I - T^*)$ et également $[\ker(I - T^*)]^\perp = [\operatorname{Im}(I-T)]^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(I - T)$ puisque $I - T$ est à image fermée.

(c) Supposons $N(I-T) = \{0\}$ et pourtant $H_1 = R(I-T) \neq H$. H_1 est un sev fermé et $T(H_1) \subset H_1$ (puisque $\forall\, x \in H_1$, $Tx = T(y - T\, y) = (Ty) - T(Ty) \in H_1$). On en déduit $T \in \mathcal{K}(H_1)$. On a $H_2 = (I - T)(H_1)$ est un s.e.v. fermé (par (b)) et $H_2 \neq H_1$. En effet, $I - T$ est injectif par hypothèse et si $H_2 = H_1$ alors $\forall\, x \in H$, $x - T\, x \in H_1 = H_2$ et donc $\exists\, y \in H_1$ tel que $x - T\, x = y - T\, y$, soit $x = y$, ce qui démontre $H = H_1$ (absurde). On construit de cette manière une suite strictement décroissante $H_n = (I - T)^n(H)$ de sev fermés de H. On choisit $x_k \in H_k$ avec $\|x_k\| = 1$ et $x_k \perp H_{k+1}$ (il suffit de prendre $y_k \in H_k \backslash H_{k+1}$ puis poser $x_k = (y_k - p_{H_{k+1}} y_k)/|y_k - p_{H_{k+1}} y_k|$). Alors

$$Tu_n - Tu_p = [(u_p - Tu_p) - (u_n - Tu_n) + u_n] - u_p \in H_{p+1} + H_{n+1} + H_n + H_p.$$

Si $n > p$ on a donc $[(u_p - Tu_p) - (u_n - Tu_n) + u_n] \perp u_p$ ce qui implique $\|Tu_n - Tu_p\|^2 \geq \|u_n\|^2 = 1$. On en conclut que l'on ne peut pas extraire de (Tu_n) une suite qui converge, d'où la contradiction. On vient de démontrer que $N(I - T) = \{0\}$ implique $R(I - T) = H$.

Inversement, supposons $R(I-T)=H$. Alors $N(I-T^*)=\{0\}$ d'après (b). Comme T^* est compact, on a $R(I-T^*)=H$ d'après le début de (c) et donc $N(I-T)=N(I-T^{**})=(R(I-T^*))^\perp=H^\perp=\{0\}$.

(d) Soit $d=\dim\ker(I-T)$, $d^*=\dim\ker(I-T^*)$. Supposons par l'absurde $d<d^*$. Soit P le projecteur de H sur $\ker(I-T)$. Il existe $\Lambda:\ker(I-T)\to\ker(I-T^*)$ qui est injective mais pas surjective. Posons $S=T+\Lambda\circ P\in\mathcal{K}(H)$. On a $N(I-S)=\{0\}$. En effet, si $0=u-S\,u=u-Tu-\Lambda\circ Pu$. Alors $u-T\,u=0$ et $\Lambda\circ Pu=0$ puisque $\operatorname{Im}\Lambda\subset\ker(I-T^*)\subset\operatorname{Im}(I-T)^\perp$. On en déduit $u\in\ker(I-T)$, puis $Pu=u$, puis $\Lambda u=0$ et enfin $u=0$. Appliquant (c) à S on a $\operatorname{Im}(I-S)=H$. Montrons que cela est absurde. En effet, soit $f\in\ker(I-T^*)\backslash\Lambda(\ker(I-T))$. Il existe alors$u\in H$ tel que

$$\operatorname{Im}(I-T)^\perp\supset\ker(I-T^*)\ni f=u-S\,u=u-T\,u-\Lambda\circ P\,u\in\operatorname{Im}(I-T)+\operatorname{Im}(I-T)^\perp.$$

On en déduit que $u-T\,u\in\operatorname{Im}(I-T)\cap\operatorname{Im}(I-T)^\perp=\{0\}$ et donc $f\in\Lambda(\ker(I-T))$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. En conclusion $d^*\le d$. De la même manière, on a $d^{**}\le d^*$ et donc $d=\dim\ker(I-T)=\dim\ker(I-T^{**})=:d^{**}\le d^*\le d$. ◫

Théorème 2.7 (Spectre réel d'un opérateur compact). Soit $T\in\mathcal{K}(H)$ et $\dim H=+\infty$. Alors, on a

(a) $0\in\sigma(T)$;

(b) $\sigma(T)\backslash\{0\}=\mathrm{VP}(T)\backslash\{0\}$, et tous les espaces propres associés aux valeurs propres sont de dimension finie;

(c) l'une des situations suivantes:
- ou bien $\sigma(T)=\{0\}$;
- ou bien $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est fini;
- ou bien $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Remarque 2.7. Soit $T:\ell^2\to\ell^2$ défini par $(Tx)_n=\alpha_n\,x_n$ avec (α_n) une suite qui tend vers 0. On voit que $T\in\mathcal{K}(\ell^2)$, que $\sigma(T)=\{\alpha_n,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$, que la dimension des espaces propres associés à une valeur propre non nulle est finie et que 0 peut ne pas être valeur propre ou l'être et avoir un espace propre associé de dimension finie ou non.

Preuve du Théorème 2.7. (a) Si $0\notin\sigma(T)$ cela signifie que T est bijectif et donc $I=T\circ T^{-1}$ est compact. Donc H est de dimension finie et une contradiction. Donc $0\in\sigma(T)$.

(b) Si $\lambda\neq0$ et $N(T-\lambda I)=\{0\}$ alors on a $R(T-\lambda I)=R(\lambda^{-1}\,T-I)=H$, d'après l'alterantive de Fredholm et le fait que $\lambda^{-1}\,T\in\mathcal{K}(H)$. On en déduit que $\lambda\in\sigma(T)$ et $\lambda\neq0$ impliquent $\lambda\in\mathrm{VP}(T)$.

(c) Supposons que $\sigma(T)\backslash\{0\}$ n'est pas un ensemble fini. On rappelle que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite (λ_n) de $\sigma(T)\backslash\{0\}=\mathrm{VP}(T)\backslash\{0\}$ tous distincts telle que $\lambda_n\to\lambda$, et il suffit de montrer que $\lambda=0$. Soit $e_n\in H$ tel que $T\,e_n=\lambda_n\,e_n$. Soit $H_n=\mathrm{Vect}\,\{e_1,...,e_n\}$. Montrons par récurrence que tous les (e_i) sont indépendants. En effet, si on avait $e_{n+1}\in H_n$, on aurait

$$e_{n+1}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,e_i,\quad\sum_{i=1}^n\lambda_{n+1}\,\alpha_i\,e_i=\lambda_{n+1}\ e_{n+1}=T\,e_{n+1}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,T\,e_i=\sum_{i=1}^n\lambda_i\,\alpha_i\,e_i.$$

Comme les $(e_i)_{1\le i\le n}$ sont indépendants, on a $(\lambda_{n+1}-\lambda_i)\,\alpha_i=0\ \forall\,i$ et donc $\alpha_i=0\ \forall\,i$, puis enfin $e_{n+1}=0$, ce qui est absurde. Donc les (e_i) sont indépendants et $H_n\subsetneq H_{n+1}$ pour tout n. D'autre part, il est clair (en faisant le raisonnement sur la base $e_1,\ \ldots\ ,\ e_n$) que $(T-\lambda_n)\,E_n\subset E_{n-1}$. Soit alors $u_n\in H_n$ tel que $\|u_n\|=1$ et $u_n\in H_{n-1}^\perp$. On a pour $p>n$

$$\frac{T\,u_n}{\lambda_n}-\frac{T\,u_p}{\lambda_p}=\frac{T\,u_n-\lambda_n\,u_n}{\lambda_n}-\frac{T\,u_p-\lambda_p\,u_p}{\lambda_p}+u_n-u_p\in H_{n-1}-H_{p-1}+H_n-H_p$$

et donc $\|\lambda_n^{-1}\,T\,u_n-\lambda_p^{-1}\,T\,u_p\|\ge\|u_p\|=1$. Si $\lambda\neq0$ on obtient une contradiction car alors on tire de $T\in\mathcal{K}(H)$ que $(\lambda_n^{-1}\,T\,u_n)$ converge à extraction d'une sous-suite. ◫

Définition 2.8. Soit $T\in\mathcal{L}(H)$. On dit que T est auto-adjoint (ou symétrique) si $T^*=T$.

Théorème 2.9 (Spectre d'un opérateur auto-adjoint). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. On pose

$$m := \inf_{u \in H,\, |u|=1} (Tu, u), \qquad M := \sup_{u \in H,\, |u|=1} (Tu, u).$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$. En fait, on peut montrer que $\sigma_{\mathbb{C}}(T) \subset \mathbb{R}$.

Preuve du Théorème 2.9. • Soit $\lambda > M$. On définit la forme bilinéaire continue (symétrique) $a_\lambda(u, v) = (\lambda\, u - T\, u, v)$. Alors, avec $\alpha := \lambda - M > 0$, on a

$$\forall\, u \in H \qquad a_\lambda(u, u) = \lambda\, |u|^2 - M\, |u|^2 \geq \alpha\, |u|^2,$$

et donc a_λ est coercive. Appliquant le théorème de Lax-Milgram on voit que

$$\forall\, f \in H, \quad \exists!\, u \in H \quad \text{tel que} \quad (\lambda\, u - T\, u, v) = (f, v) \ \forall\, v \in H,$$

de sorte que $\lambda\, u - T\, u = f$. Cela prouve que $\lambda \in \rho(T)$, i.e. $]M, \infty[\subset \rho(T)$.

• Montrons que $M \in \sigma(T)$. La forme a_M est bilinéaire symétrique et positive: $a(v, v) \geq 0$ pour tout $v \in H$. Elle vérifie donc une inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'écrit

$$|(M\, u - T\, u, v)| \leq (M\, u - T\, u, u)^{1/2}\, (M\, v - T\, v, v)^{1/2} \leq C\, (M\, u - T\, u, u)^{1/2}\, |v| \qquad \forall\, u,\, v \in H.$$

Il en résulte que

$$(*) \qquad |M\, u - T\, u| \leq C\, (M\, u - T\, u, u)^{1/2} \qquad \forall\, u \in H.$$

Soit maintenant une suite (u_n) telle que $|u_n| = 1$ et $(T\, u_n, u_n) \to M$. De (*) on déduit que $|M\, u_n - T\, u_n| \to 0$. Si on avait $M \in \rho(T)$ on aurait $u_n = (M - T)^{-1}\, (M\, u_n - T\, u_n) \to 0$ ce qui serait absurde. Donc $M \notin \rho(T)$.

• Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$. ◫

Corollaire 2.10. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.

Preuve du Corollaire 2.10. D'après le théorème 2.9 on sait que $(T\, u, u) = 0$ pour tout $u \in H$. On en déduit puisque T est symétrique $2\, (Tu, v) = (T\, (u + v), u + v) - (T\, u, u) - (T\, v, v) = 0$ pour tout $u,\, v \in H$. Donc $T = 0$. ◫

Théorème 2.11 (Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint compact). Soit H un espace de Hilbert séprable et $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Preuve du Théorème 2.11. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la suite des valeurs propres de T, distinctes, $\neq 0$. On note $\lambda_0 = 0$. On note $H_n = \ker(T - \lambda_n\, I)$. Alors $0 \leq \dim H_0 \leq \infty$, $0 < \dim H_0 < \infty$. On a

(i) les H_n sont deux à deux orthogonaux. Si $u \in H_m$, $v \in H_n$, $m \neq n$ alors

$$\lambda_m\, (u, v) = (T\, u, v) = (u, T\, v) = \lambda_n\, (u, v),$$

de sorte que $(u, v) = 0$.

(ii) On note $D := \mathrm{Vect}\,\{(H_n)_{n \geq 0}\}$. Montrons que $\bar{D} = H$. D'une part, il est clair que $T(D) \subset D$. On a donc $T(D^\perp) \subset D^\perp$ car si $u \in D^\perp$, $v \in D$ alors $(T\, u, v) = (u, T\, v) = 0$. D'autre part, l'opérateur $S := T|_{D^\perp}$ est auto-adjoint, compact et $\sigma(S) = \{0\}$. En effet, si $\lambda \in \sigma(S) \backslash \{0\}$ alors $\lambda \in \mathrm{VP}(S)$ et il existe $u \in D^\perp$, $u \neq 0$ tel que $S\, u = \lambda\, u$. Cela implique que (λ, u) est un couple de valeur propre/vecteur propre de T, donc également $u \in D$. On en déduit que $u \in D \cap D^\perp = \{0\}$, ce qui est absurde. Donc $S \equiv 0$. Par suite, $D^\perp \subset \ker T = H_0 \subset D$, donc $D^\perp = \{0\}$. On en conclut $\bar{D} = (D^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$.

(iii) Enfin, on choisit pour chaque H_n une base Hilbertienne. La réunion de ces bases est une base Hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T. ◫