Ecole Normale Supérieure **2007-2008**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP Avril 2008

Chapitre 4bis - Fonctions continues et mesures de Radon

1 - Fonctions continues sur un espace compact.

Les compacts que l'on rencontre "dans la pratique" peuvent être de différents types. Voici quelques exemples du plus particulier au plus général.

a) - Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors $X = \bar{\Omega}$ est un compact. Si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ alors $\operatorname{supp} \varphi$ est un compact de cette nature.

b_1) - Toujours en dimension finie, on peut considérer l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ (et non plus seulement ceux qui sont l'adhérance d'un ouvert). Par exemple, si T est une distribution de $\mathbb{R}^N$ à support compact, alors $\operatorname{supp} T$ peut être n'importe quel compact de $\mathbb{R}^N$.

b_2) - Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(E)$ une application linéaire, compacte. Alors $\overline{T(B_E)}$ est un compact d'un e.v.n. qui est généralement non inclus dans un e.v. de dimension finie.

b_3) - Soit E un espace de Banach séparable. Alors $\bar{B}_{E'}$ muni de la topologie de la convergence $\sigma(E', E)*$ est un espace métri(que/sable) compact.

b) - En résumé, les trois exemples précédents rentre dans le cadre des espaces métriques compacts, et les démonstrations dans les cas b_i) ne sont pas, en général, plus simple que dans ce cadre abstrait b).

c) - On peut enfin considérer un espace topologique compact $(X, \mathcal{T})$, non métrisable. La boule $\bar{B}_{E'}$ munie de la topologie de la convergence $\sigma(E', E)*$ lorsque E est un Banach non séparable (exemples: $E = \ell^\infty$, $E = L^\infty$) est de ce type. Dans ce cadre les suites de X ne sont pas toujours séquentielement compactes...

Pour simplifier la présentation nous allons nous restreindre dans ce cours au cas des espaces métriques, bien que tous les résultats doivent s'étendre au cas non métrique (cf. livres de P. Malliavin [Ma], H. Queffelec [Qe], polys de B. Perthame [Pe], C. Villani [Vi]). On notera donc X un espace (métrique) compact (et on suppose son cardinal infini !...). De plus, les preuves ne seront esquissées que dans le cas d'un compact de $\mathbb{R}^N$ (a- et b_1-): dans ce cadre on peut assez systématiquement avoir recours à la convolution.

Un espace compact X possède les propriétés suivantes:

- X est séparé: si $x \neq y$ il existe $O_x \ni x$, $O_y \ni y$ deux ouverts tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$.
- X est normal: si F_1, F_2 sont deux fermés tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors il existe $O_1 \ni F_1$, $O_2 \ni F_2$ deux ouverts tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Une autre façon de dire cela est: pour tout fermé F et ouvert O tels que $F \subset O$, il existe U un ouvert tel que $F \subset U \subset \bar{U} \subset O$.

On définit $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, on le munit de la norme uniforme

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Théorème d'Urysohn. *Soit A, B deux fermés disjoints de X; il existe $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$f|_A = 1; \qquad f|_B = 0; \qquad 0 \leq f \leq 1.$$

En particulier, $C(X)$ sépare les points: $\forall\, x,\, y \in X,\ x \neq y$, il existe $f \in C(X)$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Mieux, on peut trouver $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$0 \le f \le 1; \qquad A = \{x \in X;\ f(x) = 1\}; \qquad B = \{x \in X;\ f(x) = 0\}.$$

Preuve du Théorème d'Urysohn. - Prendre $\varepsilon > 0$ tel que $(A + 3\,\varepsilon B_1) \cap B = \emptyset$, $\rho \in C_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\operatorname{supp} \rho \subset B_1, \quad \rho \ge 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1, \quad \rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}\, \rho\big(x/\varepsilon\big),$$

et définir $\tilde f = \mathbf{1}_{A+\varepsilon\, B_1} * \rho_\varepsilon$ puis $f = \tilde f|_X$ la restriction de $\tilde f$ à X.
Dans le cas métrique général et pour avoir la conclusion forte du théorème d'Urysohn, il suffit de poser $f(x) := d(x,B)/(d(x,A) + d(x,B))$. ◻

Théorème de Tietze. Soit A un fermé de X et soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue; alors f se prolonge en une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ continue.

Preuve du Théorème de Tietze. Soit ω le module de continuité de f, qui existe puisque f est uniformément continue sur le compact A. On peut supposer ω sous-additive (i.e. $\omega(s+t) \le \omega(s) + \omega(t)\ \forall\, s,t \ge 0$, il suffit de prendre l'enveloppe concave sur $[0, \operatorname{diam}(X)]$ du module de continuité donné par le théorème de Heine). On définit

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \inf_{a \in A} \left[f(a) + \omega(d(x,a)) \right].$$

Lorsque $x \in A$, on a $f(x) \le f(a) + \omega(d(x,a)$ pour tout $a \in A$, et donc $g(x) = f(x)$. Pour $x, y \in X$ et si l'infimum est atteint en $a \in A$ dans la définition de $g(x)$, on a

$$g(y) \le f(a) + \omega(d(y,a)) \le f(a) + \omega(d(x,a)) + \omega(d(x,y)) = g(x) + \omega(d(x,y)).$$

En inversant les rôles de x et y, on trouve $|g(y) - g(x)| \le \omega(d(y,x))$ pour tout $x, y \in X$. ◻

Ces Théorèmes sont vrais pour un compact général, et en fait, dans un espace normal. La démonstration est élementaire dans le cas a), pas très compliquée dans le cas b) (voir [Pe], [Qe]) et un plus compliquée dans le cas c)

Théorème. $C(X)$ est un espace de Banach séparable.

Preuve. - Dans le cas $X \subset \mathbb{R}^N$ on peut avoir recours au théorème de Stone-Weierstrass de densité des polynômes dans les espaces de fonctions $C([-R,R]^N)$ ou avoir recours à un argument moins subtil: on définit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des partitions dyadiques de $[-R,R]^N$ avec $X \subset [-R,R]^N$, puis l'ensemble dénombrable

$$\mathcal{A} := \left\{ \left(\sum_i \lambda_i\, \mathbf{1}_{Q_i} \right) * \rho_\varepsilon,\ \ (Q_i) \in \mathcal{Q},\ \ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \ \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \right\}.$$

Alors les restrictions à X des fonctions de $\mathcal{A}$ constituent un ensemble dénombrable et dense dans $C(X)$.
- Dans le cas métrique général, on procède de la manière suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut recouvrir X de N_n boules $B(x^n_j, 1/n)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^{N_n}$ on définit alors

$$\varphi_{n,\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j\, \psi_{n,j}, \quad \psi_{n,j}(x) = \sum_{j=1}^{N_n} \frac{(1/n - d(x, x^n_j))_+}{\sum_{k=1}^{N_n} (1/n - d(x, x^n_k))_+}$$

La famille des $(\varphi_{n,\alpha})$ est dénombrable et dense dans $C(X)$. ◻

Théorème. (partition de l'unité) Soit (O_i) une famille (finie) d'ouverts recouvrant X. Il existe une famille (φ_i) de fonctions continues telles que $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp} \varphi_i \subset O_i$ et $\sum \varphi_i = 1$.

Preuve. Par compacité, on commence par se ramener à un (sous-)recouvrement fini $(O_i)_{i\in J}$. D'après le théorème d'Urysohn (conclusion "forte"), pour tour tout $i \in J$, il existe $\psi_i \in C(X)$, tel que $0 \le \psi_i \le 1$, $\psi_i \equiv 1$ sur $X \backslash \cup_{j\neq i} O_j$ et $\psi_i \equiv 0$ sur $X\backslash O_i$. On pose $\varphi_i = \psi_i/(\sum_{j\in J}\psi_j)$. En fait, comme X est compact, on peut aussi juste définir $\psi_i(x) = d(x, X\backslash O_i)$ ce qui assure que $\sum_{j\in J}\psi_j(x) \in (0,\infty)$ pour tout $x \in X$. ◫

Théorème de Riesz. La boule unité $B_{C(X)}$ n'est pas compacte pour la (topologie de la) convergence uniforme.

Théorème d'Ascoli-Arzelà. Soit $\mathcal{H} \subset C(X)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathcal{H}$ est relativement compact pour la convergence uniforme;

(ii) $\mathcal{H}$ satisfait

- $\mathcal{H}$ est borné: $\exists\, C\ \forall\, f \in \mathcal{H}\ \|f\| \le C$;

- $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu: $\exists\,\omega$ un module de continuité ($\omega \in C(\mathbb{R}_+, R_+)$, $\omega(0) = 0$) tel que $\forall\, f \in \mathcal{H}\ \forall\, x,\ y \in X\ |f(y) - f(x)| \le \omega(d(y,x))$.

Preuve du théorème en exercice. Remarquer que l'uniforme équicontinuité s'écrit également

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \ \text{ tel que } \Big(d(x_1,x_2) < \delta\Big) \implies \Big(|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{H}\Big).$$

a) - Montrer que toute fonction f de $C(X)$ est uniformément continue. Donner un exemple d'ensemble borné $\mathcal{H}$ de $C([0,1])$ qui n'est pas relativement compact.
b) - Pourquoi existe-t-il une famille dénombrable $\{x_m\}$ dense dans X? Montrer que $C(X)$, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.
c) - Montrer que si $\mathcal{H}$ est compact, alors il est borné et uniformément équicontinu.
Dans la suite on suppose que $\mathcal{H}$ est borné et uniformément équicontinu, et on considère une suite de fonctions (f_n) appartenant à $\mathcal{H}$. On va montrer que l'on peut extraire une sous-suite qui converge (uniformement) vers $f \in C(X)$.
d) - Montrer, par un procédé diagonal, qu'il existe une sous-suite $(f_{n'})$ de (f_n) telle que $(f_{n'}(x_m))$ converge pour tout $m \in \mathbb{N}$.
e) Montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(f_{n'}(x))$ converge, on note $f(x)$ sa limite. Montrer que f est continue, puis que $f_{n'}$ converge uniformément vers f.

Théorème de Stone-Weierstrass (version 1). Soit G un sous-ensemble de $C(X)$ tel que

(i) G est réticulé: pour tout $u, v \in G$ on a $\max(u,v),\ \min(u,v) \in G$;

(ii) pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in X$ il existe $u \in G$ tel que $u(x) = \alpha,\ u(y) = \beta$.

Alors G est dense dans $C(X)$ (au sens de la convergence uniforme).

Théorème de Stone-Weierstrass (version 2). Soit G un sous-ensemble de $C(X)$ tel que

(i) G contient les constantes;

(ii) G est réticulé;

(iii) G sépare les points de X: pour tout $x, y \in X$ il existe $u \in G$ tel que $u(x) \neq u(y)$.

Alors G est dense dans $C(X)$ (au sens de la convergence uniforme).

Théorème de Stone-Weierstrass (version 3). Soit G un sous-ensemble de $C(X)$ tel que

(i) G contient les constantes;

(ii) G est une sous-algèbre de $C(X)$: $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\, u\, v \in G$ on a $u + \lambda\, v, u\, v \in G$

(iii) G sépare les points de X.

Alors G est dense dans $C(X)$ (au sens de la convergence uniforme).

Exemples. (i) $\mathrm{Lip}(X)$ est dense dans $C(X)$ pour tout métrique compact (X,d).

(ii) L'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{P}(X)$ est dense dans $C(X)$ pour tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$.

(iii) L'espace des fonctions à variables séparées $C(X_1) \otimes C(X_2)$ est dense dans $C(X)$ pour tous compacts métriques X_1 et X_2. Par définition, $f \in C(X_1) \otimes C(X_2)$ si

$$f(x,y) = \sum_{i \in I,\, I\, fini} u_i(x)\, v_i(y).$$

(iv) L'espace vectoriel des polynômes trigonométriques $p_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n\, e^{i\,n\,x}$ est dense dans l'espace des fonctions périodiques $C_{per}([0, 2\,\pi]; \mathbb{C})$.

Enfin, dans le cas $K = [0,1]$ (en fait dans le cas plus général $K \subset \mathbb{R}^d$) on peut avoir des versions plus précises (et dont les preuves sont plus élémentaires) des théorèmes de Stone-Weierstrass.

Théorème de Weierstrass-Bernstein-Jackson. (cf. [Pe, p. 34]). Il existe une constante C telle que pour tout $f \in C([0,1])$ on a

$$E_n(f) := \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\| \le C\,\omega(1/n) \quad \text{et} \quad \|f - B_n(f)\| \le C\,\omega(1/\sqrt{n}),$$

où $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à n, ω le module de continuité de f et $B_n(f)$ est le polynôme de Bernstein de degré n associé à f par la relation

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f(k/n)\, x^k\, (1-x)^{n-k}.$$

2 - Espace des mesures de Radon sur un ensemble compact.

On suppose toujours que X est un espace métrique compact.

Définition 2.1. On appelle "mesure de Radon" toute forme linéaire continue T sur $C(X)$: $T : C(X) \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\exists\, C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, \varphi \in C(X) \qquad |\langle T, \varphi \rangle| = |T(\varphi)| \le C\,\|\varphi\|.$$

On note $M^1(X)$ l'espace vectoriel des mesures de Radon. C'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme duale

$$\forall\, T \in M^1(X) \qquad \|T\|_{M^1} := \sup_{u \in C(X),\ \|u\| \le 1} |T(u)|.$$

Définition 2.2. On appelle "mesure de Radon positive" toute forme linéaire T sur $C(X)$ qui satisfait

$$\varphi \in C(X),\ \varphi \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi) \ge 0.$$

Lemme 2.3. Toute "mesure de Radon positive" est continue (donc est une "mesure de Radon").

Preuve du Lemme 2.3. Pour $\varphi \in C(X)$ prendre $\psi := \|\varphi\| - \varphi \ge 0$ et utiliser la définition. ◫

On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par les ouverts de X, on la note $\mathcal{B}_X$. On appelle mesure borélienne de X une "mesure ensembliste" (une fonction positive σ-additive) sur la tribu $\mathcal{B}_X$.

Théorème 2.4 (Riesz-Radon-Markov, 1ère version). Soit μ une mesure borélienne finie. On définit la mesure de Radon positive T_μ sur $C(X)$ en posant

$$T_\mu(f) := \int_X f\, d\mu \qquad \forall f \in C(X).$$

Inversement, pour toute mesure de Radon positive T sur $C(X)$ il existe une unique mesure borélienne (finie) μ telle que $T = T_\mu$. De plus $\|T\|_{M^1(X)} = \mu(X)$.

Preuve du Théorème 2.4. Cet énoncé contient un théorème d'existence et d'unicité: toute forme linéaire positive se représente à l'aide d'une intégrale par rapport à une mesure borélienne et celle-ci est unique.

Unicité. On montre que si

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\nu \qquad \forall f \in C(X),$$

alors μ et ν coïncident sur les parties ouvertes (th d'Urysohn + th de cvgce dominée), sur les parties s'écrivant comme inersection d'un ouvert et d'un fermé (parties de type o.f.) et donc sur les réunions finies d'ensembles o.f. disjoints (ensembles élémentaires). De plus, $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}_X;\ \nu(A \cap X_n) = \mu(A \cap X_n)\ \forall n\}$ est une classe monotone qui contient les ensembles élémentaires et les ensembles élémentaires forment une algèbre de Boole de parties de X. On en déduit que $\mathcal{C} = \mathcal{B}_X$ et que $\nu \equiv \mu$.

Existence. 1) Mesure d'un ouvert. Étant donné un ouvert O de X on note $\Lambda_O := \{f \in C(X);\ \operatorname{supp} f \subset O \text{ et } 0 \leq f \leq 1\}$ et

$$\mu(O) = \sup_{f \in \Lambda_O} T(f).$$

On vérifie que (i) $O_1 \subset O_2 \Rightarrow \mu(O_1) \leq \mu(O_2)$, (ii) $\mu(\cup_n O_n) \leq \sum_n \mu(O_n)$ pour toute suite (O_n) d'ouverts, (iii) $\mu(\cup_n O_n) = \sum_n \mu(O_n)$ pour toute suite (O_n) d'ouverts disjoints.

2) Mesure d'un compact. Étant donné un compact K de X on pose

$$\mu(K) = \inf\{\mu(O),\ O \text{ ouvert},\ K \subset O\}.$$

On vérifie que (i) $K_1 \subset K_2 \Rightarrow \mu(K_1) \leq \mu(K_2)$, (ii) K compact, O ouvert $K \subset O \Rightarrow \mu(K) \leq \mu(O)$, $\mu(\cup_i K_i) = \sum_i \mu(K_i)$ pour toute famille finie (K_i) de compacts disjoints.

3) Mesure intérieure. Mesure extérieure. Pour une partie quelconque A de X on pose

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \inf\{\mu(O),\ O \text{ ouvert},\ A \subset O\}, \\ \mu_\star(A) &= \sup\{\mu(K),\ K \text{ compact},\ K \subset A\}. \end{aligned}$$

On définit $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(X);\ \mu^\star(A) = \mu_\star(A)\}$. On vérifie que les ouverts et les fermés appartiennent à $\mathcal{B}$. On étend la définition de μ à $\mathcal{B}$ en posant $\mu(A) = \mu^\star(A) = \mu_\star(A)$ si $A \in \mathcal{B}$. On vérifie que μ est $\sigma-$additive, que l'on a la caractérisation suivante de $\mathcal{B}$: pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ on a

$$A \in \mathcal{B} \quad \text{ssi} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \text{ compact},\ \exists O \text{ ouvert},\ K \subset A \subset O \quad \mu(O \backslash K) < \varepsilon.$$

On montre enfin que $\mathcal{B}$ est une tribu qui contient la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$, que μ est une mesure sur $\mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}$ est $\mu-$complète. Par restriction de μ à $\mathcal{B}_X$ on associe à μ une mesure borélienne μ' (que l'on note simplement μ par la suite). On montre que $\mathcal{B}$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}_X$ pour la mesure μ'. ◫

On appellera *mesure de Radon* associée à la forme linéaire positive T la mesure μ (ou sa restriction μ') construite par le procédé ci-dessus.

Corollaire 2.5. Toute mesure borélienne μ est régulière, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{B}_X \quad \mu(A) = \inf\{\mu(O),\ A \subset O \text{ ouvert}\} = \sup\{\mu(K),\ K \subset A \text{ compact}\}.$$

Pour toute mesure borélienne positive, l'espace $C(X)$ est dense dans $L^1(X, \mathcal{B}_X, d\mu)$.

Théorème 2.6. Toute mesure de Radon $T \in M^1(X)$ se décompose en la différence de deux mesures de Radon positives. Plus précisémment on a $T = T_+ - T_-$ où on définit pour $\varphi \in C(X)$, $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} T_+(\varphi) &= \sup\{T(\psi),\ \psi \in C(X),\ 0 \leq \psi \leq \varphi\}, \\ T_-(\varphi) &= -\inf\{T(\psi),\ \psi \in C(X),\ 0 \leq \psi \leq \varphi\}, \end{aligned}$$

et pour $\varphi \in C(X)$ quelconque $T_\pm(\varphi) = T_\pm(\varphi_+) - T_\pm(\varphi_-)$. De plus,

$$\|T\|_{M^1} = \|T_+\|_{M^1} + \|T_-\|_{M^1} = T_+(1) + T_-(1).$$

Enfin, la décomposition $T = T_1 - T_2$, $T_i \geq 0$, est unique si on impose la condition $\|T\|_{M^1} = \|T_1\|_{M^1} + \|T_2\|_{M^1}$.

Preuve du Théorème 2.6. On procède en plusieurs étapes.

- Pour $\varphi \in C(X)$, $\varphi \geq 0$, on a $T_+(\varphi) \geq T(0) = 0$. De plus, $T(\psi) \leq \|T\|_{M^1} \|\psi\| \leq \|T\|_{M^1} \|\varphi\|$ pour $0 \leq \psi \leq \varphi$, donc $T_+(\varphi) \leq \|T\|_{M^1} \|\varphi\|$.
- Soient $\varphi_i \geq 0$, $i = 1, 2$. D'une part

$$T_+(\varphi_1) + T_+(\varphi_2) := \sup_{0 \leq \psi_i \leq \varphi_i} T(\psi_1 + \psi_2) \leq \sup_{0 \leq \psi \leq \varphi_1 + \varphi_2} T(\psi) = T(\varphi_1 + \varphi_2).$$

D'autre part, pour $\varepsilon > 0$ on fixe ψ telle que $0 \leq \psi \leq \varphi_1 + \varphi_2$ et $T(\psi) \geq T_+(\varphi_1 + \varphi_2) - \varepsilon$. On écrit $\psi = (\psi - \varphi_1)_+ + \varphi_1 - (\psi - \varphi_1)_+$ et on remarque que $0 \leq (\psi - \varphi_1)_+ \leq \varphi_2$, $0 \leq \varphi_1 - (\psi - \varphi_1)_+ \leq \varphi_1$. On en déduit

$$\begin{aligned} T_+(\varphi_1 + \varphi_2) - \varepsilon &\leq T(\psi) = T((\psi - \varphi_1)_+) + T(\varphi_1 - (\psi - \varphi_1)_+) \\ &\leq T_+(\varphi_2) + T_+(\varphi_1). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $T_+(\varphi_1) + T_+(\varphi_2) = T_+(\varphi_1 + \varphi_2)$.
- Pour $\varphi \in C(X)$ et $\varphi_i \geq 0$ telles que $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ on a

$$T_+(\varphi_+) + T_+(\varphi_1) = T_+(\varphi_+ + \varphi_1) = T_+(\varphi_- + \varphi_2) = T_+(\varphi_-) + T_+(\varphi_2),$$

de sorte que

$$T_+(\varphi) := T_+(\varphi_+) - T_+(\varphi_-) = T_+(\varphi_2) - T_+(\varphi_1).$$

On en déduit que pour tout $\varphi_i \in C(X)$ on a

$$T_+(\varphi_1 + \varphi_2) = T_+(\varphi_1) + T_+(\varphi_2),$$

puisque $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{1+} + \varphi_{2+} - [\varphi_{1-} + \varphi_{2-}]$. Enfin, la linéarité de T_+ provient de ce que pour tout $\varphi \geq 0$, $\lambda > 0$ on a $T_+(\lambda\,\varphi) = \lambda\, T_+(\varphi)$ et pour tout $\varphi \in C(X)$ on a $T_+(-\varphi) = -T_+(\varphi)$.
- Il est clair que $T_- := T_+ - T$ est une forme linéaire continue. Puisque pour tout $\varphi \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} T_-(\varphi) &= \sup_{0 \leq \psi \leq \varphi} T(\psi - \varphi) \qquad \geq 0 \ \text{(prendre } \psi = \varphi) \\ &= \sup_{0 \leq \chi \leq \varphi} T(-\chi) = -\inf_{0 \leq \chi \leq \varphi} T(\chi), \end{aligned}$$

T_- est positive et bien définie comme dans l'énoncé.
- D'une part, on a

$$\begin{aligned} T^+(1) + T^-(1) &= \sup\{T(g - h),\ g, h \in C(X),\ 0 \leq g, h \leq 1\} \\ &= \sup\{T(\psi),\ \psi \in C(X),\ |\psi| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T\|_{M^1} \|\psi\|,\ \psi \in C(X),\ \|\psi\| \leq \|1\|\} = \|T\|_{M^1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour une mesure de Radon positive S et pour tout $f \in C(X)$, on a $|S(f)| \leq S(|f|) \leq S(\|f\|) = \|f\|\, S(1)$ (puisque $S(|f| \pm f) \geq 0$ et $|f| \leq \|f\|$). On en déduit d'une part $\|S\|_{M^1} = S(1)$ puisque

$$S(1) \leq \|S\|_{M^1} := \sup_{\|f\| \leq 1} |S(f)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\|\, S(1) = S(1),$$

et donc

$$\|T_+\|_{M^1} + \|T_-\|_{M^1} = T_+(1) + T_-(1) \leq \|T\|_{M^1}.$$

On en déduit qu'inversement, pour tout $f \in C(X)$, on a

$$|T(f)| = |T_+(f) - T_-(f)| \leq |T_+(f)| + |T_-(f)| \leq \|f\| \, (T_+(1) + T_-(1)),$$

et donc $\|T\|_{M^1} \leq (T_+(1) + T_-(1))$.

- Enfin, si $T = T_1 - T_2$, $T_i \geq 0$, est une autre décomposition alors pour tout $f \in C(X)$, $f \geq 0$, on a

$$T_+(f) = \sup\{T(g),\ 0 \leq g \leq f\} \leq \sup\{T_1(g),\ 0 \leq g \leq f\} = T_1(f),$$

ce qui signifie que $\nu := T_1 - T_+ \geq 0$. On en conclut que

$$\|T_1\|_{M^1} = T_1(1) = T_+(1) + \nu(1) = \|T_+\|_{M^1}$$

si, et seulement si, $\nu \equiv 0$, et donc $\|T\| = \|T_1\|_{M^1} + \|T_2\|_{M^1}$ si, et seulement si, $T_1 = T_+$ et $T_2 = T_-$. ◻

Remarque. Ce résultat peut être écrit dans un cadre abstrait: evn ordonné ($u \geq 0$ si $u \in C$ un cône fermé tel que $C \cap (-C) = \{0\}$), plus quelques autres hypothèses ... On utilise ici que pour tout $u \in E$, il existe $u^{\pm} \geq 0$ tels que $u = u^+ - u^-$, que $0 \leq u \leq v$ implique $\|u\| \leq \|v\|$, et pour la dernière partie du résultat qu'il existe $\mathbf{1} \in E$ tel que $\|\mathbf{1}\| = 1$, $\|u\| \, \mathbf{1} \pm u \geq 0$ pour tout $u \in E$. En pratique, pour tous les espaces de fonctions continues munis de la norme de la convergence uniforme que nous présentons dans la section 3, ce typde de résultat de décomposition est valable.

Théorème 2.7 (Riesz-Radon-Markov, 2ème version). Soit T une mesure de Radon sur $C(X)$. Il existe deux mesures boréliennes positives $\mu_\pm$ telles que $T = T_{\mu_+} - T_{\mu_-}$. On note $\mu = \mu_+ - \mu_-$ et on appelle μ "mesure (ensembliste) signée". C'est une application de $\mathcal{B}_X$ dans $\mathbb{R}$. Finalement, on note indifférement T ou μ la mesure de Radon et la mesure ensembliste associée, on préfère la notation μ.

Remarque. 1. Les mesures ensemblistes $\mu_\pm$ asociées aux mesures de Radon positives $T_\pm$ sont étrangères, i.e. $\exists A$ borélien de X tel que $\mu_+(A) = \mu_+(X)$ et $\mu_-(X \backslash A) = \mu_-(X)$.

2. Pour une mesure borélienne signée $\mu = \mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_\pm \geq 0$ on note encore sous la forme d'une seule intégrale l'expression suivante

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu_+ - \int_X \varphi \, d\mu_- \qquad \forall \, \varphi \in L^1(X, \mathcal{B}_X, |\mu|), \quad |\mu| := \mu_+ + \mu_-.$$

Définition 2.8 Convergence faible $*$-$\sigma(M^1(X), C(X))$. On dit qu'une suite $(T_n) = (\mu_n)$ de mesures converge faiblement vers $T = \mu$, on note $\mu_n \rightharpoonup \mu \ \sigma(M^1, C)$, si

$$T_n(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu_n \ \longrightarrow \ T(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu \qquad \forall \, \varphi \in C(X).$$

Théorème 2.9. La boule unité $B_{C(X)}$ est compacte et séquentiellement compacte pour la topologie/convergence faible $*$-$\sigma(M^1(X), C(X))$. Etant donnée (μ_n) une suite bornée dans $M^1(X)$, par exemple si $\mu_n \geq 0$ il suffit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \, n \in \mathbb{N} \qquad \int_X d\mu_n \leq C,$$

il existe $\mu \in M^1(X)$ et une sous-suite (μ_{n_k}) telle que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ faible $*$-$\sigma(M^1, C)$. De plus, si $\mu_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\|\mu\| = \mu(1) = \lim \mu_{n_k}(1) = \lim \|\mu_{n_k}\|$.

3 - Espaces de fonctions continues et de mesures de Radon dans le cas d'un espace localement compact et σ-compact.

Dans ce paragraphe X désignera toujours un espace métrique non compact, localement compact et σ-compact et plus précisémment qu'il existe une suite de compacts (X_m) tel que $X_m \subset \text{int}(X_{m+1})$ et $X = \lim X_m$, on dit que (X_m) est une suite exhaustive de compacts. Les exemples typiques sont $\mathbb{R}^N$ (prendre $X_m = B(0,m)$), les ouverts de $\mathbb{R}^N$ (prendre $X_m = \{x \in X,\ d(x, X^c) > 1/m,\ d(x,0) < m\}$) et les fermés non bornés de $\mathbb{R}^N$ (prendre $X_m = B(0,m) \cap X$). Attention, nous supposons donc ici que X n'est pas compact (puisque (O_m) avec $O_1 := \text{int}(X_2)$, $O_m := \text{int}(X_{m+1}) \backslash X_{m-1}$ pour $m \geq 2$, est un recouvrement de X par des ouverts dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini, et que toute suite (x_m) telle que $x_m \in X_m \backslash X_{m-1}$ n'admet pas de point d'adhérence.

Execrice. Montrer que que l'on peut construire un ensemble métrique compact $(\hat{X}, \hat{d})$ tel que $\hat{X} = X \cap \{\infty\}$, $\infty \notin X$ et $\hat{d}|_X = d$. On appelle $(\hat{X}, \hat{d})$ le compactifié d'Alexandrov de (X, d).

3.1 - Introduction.

Définition 3.1. Sur X, on définit les espaces de fonctions continues suivants

(i) Pour tout compact $K \subset X$, $C_K(X)$ est l'espace des fonctions continues $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telles que $\text{supp}\, \varphi \subset K$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée p_K. C'est un espace de Banach séparable.

(ii) $C_c(X)$ est l'espace des fonctions continues à support compact obtenu comme limite inductive des $C_{X_m}(X)$, il est donc muni d'une structure d'evtlcs. C'est un espace complet, séparable et non métrisable.

(iii) $C_0(X)$ est l'espace des fonctions continues φ qui tendent vers 0 à l'infini (au sens où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m tel que $|f(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \notin X_m$) que l'on munit de la norme uniforme sur X, noté $\|.\|$. C'est un espace de Banach séparable qui admet $C_c(X)$ comme sous espace dense pour la norme uniforme $\|.\|$ (i.e. $C_0(X) = \overline{C_c(X)}^{\|.\|}$) et qui est un sous-espace fermé de $C_b(X)$.

(iv) $C_b(X)$ est l'espace des fonctions continues bornées que l'on munit de la norme uniforme $\|.\|$. C'est un espace de Banach non séparable.

(v) L'espace $C(X)$ des fonctions continues que l'on munit de la structure d'espace à semi-normes dénombrables en définisant sa topologie grâce à la famille de semi-normes (p_{X_m}). C'est un espace de Fréchet séparable.

On a les inclusions (ensemblistes et topologiques)

$$C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X) \subset C(X).$$

En général, on appelle espace des mesures de Radon les formes linéaires continues sur l'espace $C_c(X)$, on note celui-ci $M^1_{loc}(X)$, mais on appellera également mesures de Radon les formes linéaires sur $C_0(X)$ et $C(X)$ parce que les espaces duaux $(C_0(X))' = M^1(X)$ et $(C(X))' = M^1_{comp}(X)$ s'identifient à des sous-espaces de $M^1_{loc}(X)$. En résumé, on a les inclusions suivantes

$$M^1_{loc}(X) := (C_c(X))' \supset M^1(X) = (C_0(X))' \supset M^1_{comp}(X) = (C(X))' \quad \text{mais} \quad M^1(X) \subset (C_b(X))'.$$

Remarque. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on ne peut pas prolonger en général une fonction de $C_b(\Omega)$ en une fonction de $C_b(\bar{\Omega})$. On a également $C_c(\Omega) \subset C_c(\bar{\Omega}) \subset C_b(\bar{\Omega})$ et $\overline{C_c(\Omega)} =: C_0(\Omega) \subset \overline{C_c(\bar{\Omega})} =: C_0(\bar{\Omega})$, toutes les inclusions étant stricte lorsque Ω est un ouvert non borné et distinct de $\mathbb{R}^N$. On construit ainsi deux familles de mesures de Radon les unes pouvant charger $\partial\Omega$, les autres non.

Commençons par une description d'ensemble des résultats valables dans ces espaces, que nous présenterons ensuite espace par espace.

Résultat 0. Il existe une suite (χ_m) de fonctions de $C_c(X)$ telles que $\chi_m \equiv 1$ sur X_m, $\text{supp}\, \chi_m \subset X_{m+1}$ et une suite (φ_m) de fonctions de $C_c(X)$ telles que $\varphi_m \equiv 1$ sur $X_m \backslash X_{m-1}$ pour $m \geq 2$, $\varphi_1 \equiv 1$ sur X_1, $\text{supp}\, \varphi_m \cap \text{supp}\, \varphi_\ell = \emptyset$ si $|m - \ell| \geq 2$ (prendre $\varphi_m = \chi_m - \chi_{m-2}$).

Résultat 1. Toute forme linéaire positive sur un espace de fonctions continues est continue. Inversement, toute forme linéaire continue sur un espace de fonctions continues est la différence de deux formes linéaires positives.

Mesures boréliennes signées. Si $\mu_\pm$ sont deux mesures boréliennes positives σ-finies (au sens où $\mu_\pm(X_m) < \infty$ pour tout m) on définit l'application additive $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sur $\cup\mathcal{B}_{X_m}$. Par abus de langage, on dira que μ est une mesure borélienne signée bien que μ ne soit pas a priori σ-additive; c'est en fait $\mu|_{\mathcal{B}_{X_m}}$ qui est une mesure borélienne signée pour tout m. Lorsque $\mu_-(X) < \infty$ alors μ est bien définie comme mesure sur X: c'est une application σ-additive sur $\mathcal{B}_X$.

Résultat 2. Toute forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues $C_c(X)$ (resp. $C_0(X)$, $C(X)$) se représente à l'aide d'une mesure positive borélienne σ-finie (resp. finie, à support compact). Le même résultat est valable dans un cadre "signé". On peut donc considérer indifféremment une mesure de Radon comme une forme linéaire continue T sur un espace de fonctions continues et comme une mesure ensembliste signée μ, on préfera en général la notation μ et l'écriture intégrale qui va avec.

Résultat 3. L'espace $C_b(X)$ et sont dual $(C_b(X))'$ sont "pathologiques".

Les espaces de mesures de Radon possèdent des structures d'espace normé (d'eàsn) relatives à une (des semi-)norme(s) forte(s), et également des structures d'esàsn relatives à des "topologies faibles" engendrant donc des notions de convergences "faibles". Etant donnée une suite (μ_n) de mesures de Radon, on introduit les trois notions de convergence suivantes:

- On dit que (μ_n) *converge vaguement* vers μ si

$$\forall\,\varphi \in C_c(X) \qquad \int_X \varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu.$$

- On dit que (μ_n) *converge faiblement* vers μ si

$$\forall\,\varphi \in C_c(X) \qquad \int_X \varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu.$$

- On dit que (μ_n) *converge étroitement* vers μ si

$$\forall\,\varphi \in C_b(X) \qquad \int_X \varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu.$$

Résultat 4. Les suites bornés de $M^1(X)$ sont

- séquentiellement compactes au sens de la convergence faible;

- séquentiellement au sens de la convergence étroite sous une hypothèse de tension; dans ce cas et sous une hypothèse supplémentaire de positivité la "masse totale est conservée".

3.2 L'espace $M^1_{loc}(X) = (C_c(X))'$ des mesures de Radon localement bornées.

Lemme 3.2.1. L'espace $C_c(X)$ est un espace complet, séquentiellement séparable et non métrisable.

Remarques su la preuve du Lemme 3.2.1. La structure topologique étant celle d'une limite inductive, nous renvoyons aux compléments du 1er chapitre pour la preuve. La notion standard de suite de Cauchy est la suivante: (u_n) suite de $C_c(X)$ est de Cauchy si pour tout voisinage U de 0 dans $C_c(X)$ il existe N_U tel que $u_\ell - u_n \in U$ pour tout $n, \ell \geq N_U$. Si on accepte que dans une topologie de limite inductive ceci est équivalent à dire qu'il existe m tel que $u_n \in C_{X_m}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que $p_{X_m}(u_\ell - u_n) < \varepsilon$ pour tout $n, \ell \geq N_\varepsilon$ (c'est cette définition de suite de Cauchy que nous retiendrons), alors il est claire (u_n) est convergente, et donc que $C_c(X)$ est complet. ◫

Définition 3.2.2. Les espaces de mesures de Radon sont les espaces de formes linéaires (continues) sur $C_c(X)$.

(i) On appelle mesure de Radon positive sur X une forme linéaire T sur $C_c(X)$ telle que

$$\forall\, \varphi \in C_c(X), \quad \varphi \geq 0, \quad \text{ on a } \quad \langle T, \varphi \rangle \geq 0.$$

(ii) On appelle mesure de Radon sur X une forme linéaire continue T sur $C_c(X)$, on note $T \in M^1_{loc}(X)$: ce sont les formes linéaires $T : M^1_{loc}(X) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, K \text{ compact} \subset X, \;\; \exists\, C_K \;\; \forall\, \varphi \in C_K(X) \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \, \|\varphi\|_{C(K)}.$$

On munit M^1_{loc} d'une structure d'eàsn dénombrable avec la famille de semi-normes $(p^*_{X_m})$

$$p^*_{X_m}(T) := \sup_{\varphi \in C_{X_m}(X), \; \|\varphi\| \leq 1} |\langle T, \varphi \rangle|,$$

qui en fait un espace de Fréchet.

(iii) On dit qu'une mesure de Radon T est bornée (ou de masse finie), on note $T \in M^1(X)$, si

$$\exists\, C \;\; \forall\, \varphi \in C_c(X) \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \, \|\varphi\|_{C_0(X)}.$$

Lemme 3.2.3. Une mesure de Radon positive est une mesure de Radon. Donc, pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, les distributions positives de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont les mesures de Radon sur Ω. Inversement, toute mesure de Radon se décompose en la différence de deux mesures de positives.

Preuve du Lemme 3.2.3. Si $T \geq 0$, alors pour tout $\varphi \in C_{X_m}(X)$, on a $T(p_{X_{m+1}}(\varphi)\, \chi_{m+1} \pm \varphi) \geq 0$, et donc T est continue. Pour établir le résultat de décomposition, il suffit d'utiliser le théorème de décomposition établi dans $(C_{X_m}(X))'$ pour tout m dans la section 2. On construit ainsi $0 \leq T^\pm_m \in C_{X_m}(X)$ telles que $T^+_m - T^-_m = T|_{C_{X_m}(X)}$ et il suffit de poser $T^\pm|_{C_{X_m}(X)} := T^\pm_m$. ◫

Théorème 3.2.4 (de représentation de Riesz-Radon-Markov, 3ème version). On a une bijection entre

(i) les formes linéaires $T \in (C_c(X))' =: M^1_{loc}(X)$;

(ii) les mesures signées $\mu = \mu_+ - \mu_-$, où $\mu_\pm$ **mesures borélienne positives σ-finies**

via la correspondance $T \leftrightarrow \mu$ donnée par

$$T(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu_+ - \int_X \varphi \, d\mu_- \qquad \forall\, \varphi \in C_c(X),$$

et lorsque l'on impose que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$p^*_{X_m}(T) = \mu_+(\mathrm{int}(X_m)) + \mu_-(\mathrm{int}(X_m)).$$

On confond dans la suite la mesure de Radon et la "mesure ensembliste" qui lui est associée.

Preuve du Théorème 3.2.4. Grâce au théorème 2.4 de représentation pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\mu^\pm_m$ mesure borélienne finie sur $\mathcal{B}(X_m)$ telle que $T^\pm|_{C_{X_m}(X)} = T_{\mu^\pm_m}$ [Remarque. Il est à noter que dans la section 2 le théorème de représentation s'applique à $T^\pm|_{C(X_m)}$ plutôt qu'à $T^\pm|_{C_{X_m}(X)}$, mais la même preuve conduit au résultat souhaité: la mesure $\mu^\pm_m$ ainsi construite est une variante de la mesure précisémment construite dans le théorème 2.4, mais qui ne charge pas le bord ∂X_m. Une autre possibilité est de définir $T^\pm_m$ sur $C(X_m)$ de la manière suivante: $T^\pm_m(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} T^\pm(\tilde{\varphi}\, \eta_{m,\varepsilon})$ pour tout $\varphi \in C(X_m)$, où $\tilde{\varphi} \in C_c(X)$ est un prolongement de φ et $\eta_{m,\varepsilon}$ est une suite décroissante de fonctions de $C_{X_{m+1}}$ telles que $\eta_{m,\varepsilon} \to \mathbf{1}_{X_m}$ ponctuellement. Comme $T^\pm_m$ ainsi construite est linéaire et positive sur $C(X_m)$ elle est continue, et cette fois-ci on peut appliquer sans modification le théorème 2.4 de représentation]. Dans tous les cas, on construit une suite de mesures $(\mu^\pm_m)$ telle que $\mu^\pm_m|_{\mathcal{B}_\ell}$ est constante pour tout $m \geq \ell + 1$. On définit ainsi $\mu^\pm := \lim_{m \to \infty} \mu^\pm_m$ sur $\cup \mathcal{B}(X_\ell)$

puis $\mu^\pm(A) := \lim_{\ell\to\infty} \mu^\pm(A\cap X_\ell)$ pour $A \in \mathcal{B}(X)$ quelconque. Le seul point à vérifier est que $\mu^\pm$ est bien σ-additif. Or pour une suite (A_n) de $\mathcal{B}(X)$ disjoints, on a pour tout m

$$\mu^\pm(\cup A_n) \geq \mu^\pm(\cup(A_n\cap X_m)) = \sum_n \mu^\pm(A_n\cap X_m), \quad \text{donc} \quad \mu^\pm(\cup A_n) \geq \sum_n \mu^\pm(A_n),$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m_ε tel que

$$\mu^\pm(\cup A_n) \leq \mu^\pm(\cup(A_n\cap X_{m_\varepsilon})) + \varepsilon = \sum_n \mu^\pm(A_n\cap X_{m_\varepsilon}) + \varepsilon \leq \sum_n \mu^\pm(A_n) + \varepsilon,$$

ce qui prouve finalement qu'il y a égalité, et donc σ-additivité de μ. ◫

Lemme 3.2.5. Soit (μ_n) une suite de $M^1_{loc}(X)$ telle que pour tout $\varphi \in C_c(X)$ on ait $\sup_n |\mu_n(\varphi)| < \infty$. Alors il existe une mesure $\mu \in M^1_{loc}(X)$ et une sous-suite (μ_{n_k}) telle que μ_{n_k} converge vaguement vers μ, c'est-à-dire au sens de la convergence faible $*$-$\sigma(M^1_{loc}(X), C_c(X))$

Preuve du Lemme 3.2.5. C'est une conséquence immédiate du théorème de la relative séquentielle compacité faible des suites faiblement bornée de X' étbali dans le chapitre 1 pour un eàsn dénombrable X séquentiellement séparable. ◫

De l'injection $L^1_{loc}(X) \subset M^1_{loc}(X)$ on déduit que de toute suite bornée dans $L^1_{loc}(X)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vaguement dans $M^1_{loc}(X)$.

3.3 - L'espace $M^1(X) = (C_0(X))'$ des mesures de Radon bornées.

Lemme 3.3.1. Toute forme linéaire positive sur $C_0(X)$ est continue. Réciproquement, toute forme linéaire continue T sur $C_0(X)$ se décompose de manière unique comme la différence de deux formes linéaires positives: $T = T_+ - T_-$ telles que $\|T\|_{(C_0)'(X)} = \|T_+\|_{(C_0)'(X)} + \|T_-\|_{(C_0)'(X)}$.

Preuve du Lemme 3.3.1. Soit $T \geq 0$. Si T n'est pas continue, alors pour tout n il existe $u_n \in C_0(X)$ telle que $\|u\| \leq 1$ et $T(u_n) \geq n$. Alors $u := \sum u_n/n^2$ convergence normalement dans l'espace de Banach $C_0(X)$ et pourtant $T(u) \geq \sum T(u_n)/n^2 \geq \sum 1/n = +\infty$. La preuve de la décomposition est juste identique à la preuve présentée dans le cas de $M^1(X)$ avec X compact, puisque $C_0(X)$ est également un evn réticulé. ◫

Lemme 3.3.2. Toute forme linéaire T sur $C_c(X)$ "de masse finie" se prolonge en une forme linéaire continue sur $C_0(X)$. D'où l'identification $M^1(X) = (C_0(X))'$. Elle se prolonge également en une forme linéaire continue sur $C_b(X)$. En particulier, la "masse" $|T|(1)$ de T est finie, d'où la dénomination "mesure borélienne de masse finie".

Preuve du Lemme 3.3.2. Il est clair que si $\tilde{T} \in (C_0(X))'$ alors $T := \tilde{T}|_{C_c(X)} \in M^1_{loc}(X)$ et est de masse finie. Réciproquement, étant donnée une forme linéaire $T \in M^1_{loc}(X)$ de masse finie on définit $\tilde{T} : C_0(X) \to \mathbb{R}$ linéaire continue en posant

$$\forall\, \varphi \in C_0(X) \qquad \tilde{T}(\varphi) := \lim_{m\to\infty} T(\varphi\,\chi_m),$$

cette limite existe puisque la suite $T(\varphi\,\chi_m)$ est de Cauchy (en effet, $\|\varphi\,\chi_m - \varphi\,\chi_\ell\| \to 0$ lorsque $m,\, \ell \to \infty$). Pour $T \in (C_0(X))'$ avec $T \geq 0$ et pour $0 \leq \varphi \in C_b(X)$, on pose

$$\tilde{T}(\varphi) := \lim_{m\to\infty} T(\varphi\,\chi_m),$$

cette limite existe puisque la suite $T(\varphi\,\chi_m)$ est croissante et majorée (par $\|T\|_{M^1}\,\|\varphi\|$). Dans le cas général, on définit

$$\tilde{T}(\varphi) = \tilde{T}^+(\varphi_+) - \tilde{T}^+(\varphi_-) - \tilde{T}^-(\varphi_+) + \tilde{T}^-(\varphi_-).$$

Remarquons enfin que par définition $\tilde{T}(\varphi\,(1-\chi_m)) \to 0$ quand $m \to \infty$. ◫

Théorème 3.3.3 (Riesz-Radon-Markov, 4ème version). On a une bijection entre

(i) les formes linéaires $T \in (C_c(X), \|.\|_u)'$;
(ii) les formes linéaires $T \in (C_0(X), \|.\|_u)' =: M^1(X)$;
(iii) les mesures boréliennes signées $\mu = \mu_+ - \mu_-$, où $\mu_\pm$ **mesures boréliennes positives finies**
via la correspondance $T \leftrightarrow \mu$ donnée par

$$T(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu_+ - \int_X \varphi \, d\mu_- \qquad \forall \, \varphi \in C_c(X),$$

et lorsque l'on impose que

$$\|T\|_{M^1(X)} := \sup_{\varphi \in C_0(X), \, \|\varphi\| \le 1} \langle T, \varphi \rangle = \mu_+(X) + \mu_-(X).$$

Remarque. Ce théorème de représentation permet détendre toute forme linéaire $T \in M^1(X)$ en une forme linéaire sur les espaces $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}_X)$ et $L^\infty(X, \mathcal{B}_X, d|\mu|)$ (où $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$) via la théorie de l'intégrale de Lebesque, mais ici l'espace dépend de la mesure elle-même, ce qui n'est pas adaptée à un approche "analyse fonctionnelle".

Eléments de preuve du théorème 3.3.3. Il est calir que pour μ bornée la forme linéaire associée T_μ est continue dans $C_0(X)$. Inversement, si T est continue, le théorème de RRM (3ème version) permet d'associer à $T_\pm$ une mesure borélienne σ-finie $\mu_\pm$ et le tout est de montrer que $\mu_\pm$ est finie. Dans le cas contraire, on a

$$\mu_\pm(X) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_\pm(X_m \backslash X_{m-1}) = +\infty \quad \text{et} \quad \int_X \psi_m \, d\mu_\pm \ge \varepsilon_m := \mu_\pm(X_m \backslash X_{m-1}),$$

avec $\psi_m \in C_c(X_{m+1} \backslash X_{m-2})$ telle que $0 \le \psi_k \le 1$ et $\psi_m \ge \mathbf{1}_{X_m \backslash X_{m-1}}$. Soit $(\eta_m) \in c_0(\mathbb{N}^*)$ telle que $(\eta_m \, \varepsilon_m) \notin \ell^1$ (il suffit de prendre (m_k) strictement croissante telle que $\sum_{m=m_k}^{m_{k+1}} \varepsilon_m \ge 1$, puis de définir (η_m) par $\eta_m = 1/k$ pour $m \in \{m_k, ..., m_{k+1}\}$). On a alors

$$T_\pm(\psi) \ge \sum_{m=1}^{\infty} \mu_\pm(X_m \backslash X_{m-1}) = +\infty \quad \text{pour} \quad \psi := \sum_m \eta_m \, \psi_m \in C_0(X),$$

ce qui est absurde. ◻

Lemme 3.3.4. Soit (μ_n) une suite bornée de $M^1(X)$. Alors il existe une mesure $\mu \in M^1(X)$ et une sous-suite (μ_{n_k}) telle que μ_{n_k} faiblement vers μ, c'est-à-dire, au sens de la convergence faible $*$-$\sigma(M^1(X), C_0(X))$:

$$\forall \, \varphi \in C_0(X) \qquad \langle \mu_{n_k}, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle.$$

On a $\|\mu\| \le \liminf \|\mu_{n_k}\|$ sans avoir nécessairement égalité.

Preuve du lemme 3.3.4. En effet, pour $E = C_0(X)$, la boule unité $B_{E'}$ est séquentiellement compacte au sens de la convergence faible associée à la topologie faible $\sigma(E', E)$, puisque E est un evn séparable. ◻

3.4 - L'espace $C_b(X)$ et son dual $(C_b(X))'$.

L'espace $(C_b(X))'$ (avec X non compact) est typiquement l'espace que l'on ne souhaite pas décrire et dans lequel on ne souhaite pas travailler, ou le moins possible! La raison est qu'il possède plein de propriétés pathologiques: $C_b(X)$ n'est pas séparable, la boule $B_{(C_b(X))'}$ est compacte pour la topologie $*\sigma((C_b(X))', C_b(X))$ mais n'est pas séquentiellement compacte pour cette topologie. Remarquer que cela n'est pas une contradiction dans la mesure où la topologie $*\sigma((C_b(X))', C_b(X))$ (même restreinte à la boule $B_{(C_b(X))'}$) n'est pas métrisable.

Lemme 3.4.1. L'espace $C_b(X)$ n'est pas séparable.

Preuve du Lemme 3.4.1. On considère une suite de points (x_m) telle que $x_m \in O_m := \mathrm{int}X_m \backslash X_{m-1}$ (cette suite est sans point d'adhérence) et une suite ψ_m telle que que $\mathrm{supp}\,\psi_m \subset \bar{O}_m$ et $\psi_m(x_m) = 1$ (il suffit de prendre $\chi_m(x) = d(x, O_m^c)/d(x_m, O_m^c)$). Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on définit alors une fonction ψ_A et un voisinage O_A de ψ_A en posant

$$\psi_A := \sum_{m \in A} \psi_m, \qquad O_A := \{\psi \in C_b(X);\ \|\psi - \psi_A\| < 1/2\}.$$

S'il existait une suite (ϕ_n) une suite dense dans $C_b(X)$, alors pour tout A il existe $n(A)$ tel que $\phi_{n(A)} \in O_A$. Or $O_A \cap O_B = \emptyset$ si $A \neq B$ implique $n(A) \neq n(B)$ si $A \neq B$. L'application $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto n(A) \in \mathbb{N}$ est donc injective, ce qui est absurde. ◫

Lemme 3.4.2. Toute forme linéaire positive sur $C_b(X)$ est continue. Réciproquement, toute forme linéaire continue T sur $C_b(X)$ se décompose de manière unique comme la différence de deux formes linéaires positives: $T = T_+ - T_-$ telles que $\|T\|_{(C_b)'(X)} = \|T_+\|_{(C_b)'(X)} + \|T_-\|_{(C_b)'(X)}$.

Preuve du Lemme 3.4.2. La preuve est juste identique à celle du cas $C(X)$, X compact. ◫

Lemme 3.4.3. $M^1(X)$ est isomorphe à un sev fermé strict de $(C_b(X))'$. On a mieux

$$(C_b(X))' = M^1(X) \oplus \mathcal{R}(X),$$

où $\mathcal{R}(X)$ désigne l'ensemble des formes linéaires de $C_b(X)$ supportées à l'infinie: $R \in \mathcal{R}(X)$ si $R \in (C_b(X))'$ et $\langle R, \varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in C_0(X)$.

Preuve du Lemme 3.4.3. On définit le sev F de $(C_b(X))'$ par

$$F := \{\tilde{T} \in (C_b(X))',\ \lim_{m\to\infty} |\tilde{T}|(1 - \chi_m) = 0\}.$$

F est fermé puisque si $(\tilde{T}_n)$ est une suite de F telle que $\tilde{T}_n \to \tilde{T}$ dans $(C_b)'$, alors en utilisant que $|\tilde{T}| = (\tilde{T}_+ - \tilde{T}_{n+}) + (\tilde{T}_- - \tilde{T}_{n-}) + |\tilde{T}_n|$ et $\|\tilde{T}_+ - \tilde{T}_{n+}\| + \|\tilde{T}_- - \tilde{T}_{n-}\| = \|\tilde{T} - \tilde{T}_n\|$, on déduit que

$$|\tilde{T}|(1 - \chi_m) \le \|\tilde{T} - \tilde{T}_n\|_{(C_b)'} + |\tilde{T}_n|(1 - \chi_m) \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

On rappelle que pour tout $T \in M^1(X)$ on a défini, dans la section précédente, son extension $\tilde{T} \in (C_b(X))'$ en posant $\tilde{T}(\varphi) := \lim_m T(\varphi\,\chi_m)$ pour tout $\varphi \in C_b(X)$ (on a prouvé que cette limite existe essentiellement par un argument de monotonie) et on a montré que $\tilde{T} \in F$. On note $\Phi : M^1(X) \to F$, $T \mapsto \tilde{T}$. Il est clair que Φ est une application linéaire et continue ($|\tilde{T}(\varphi)| = \limsup |T(\varphi\,\chi_m)| \le \|T\|_{M^1}\,\|\varphi\|$). On définit $\Psi : F \to M^1(X)$ l'application restriction $\tilde{T} \mapsto T := \tilde{T}|_{C_0(X)}$ qui est également linéaire et continue. On a bien évidemment $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{M^1}$. On a également $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_F$ puique $\forall\, \tilde{T} \in F$, $\forall\, \varphi \in C_b(X)$, par définition

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle - \langle \Phi \circ \Psi(\tilde{T}), \varphi\rangle = \langle \tilde{T}, \varphi\rangle - \lim_{m\to\infty} \langle \Psi(\tilde{T}), \chi_m\,\varphi\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \tilde{T}, \varphi\,(1 - \chi_m)\rangle = 0.$$

Cela prouve que M^1 est isomorphe à F et il reste à démontrer qu'il existe $T \in (C_b(\mathbb{R}))' \backslash F$ ce que nous obtenons grâce à Hahn-Banach. On définit $G := \mathrm{Vect}(C_0(X), e)$, où e désigne la fonction unité ($e(x) = 1$ $\forall\, x \in X$). Pour tout $\psi \in G$, on a $\psi = \varphi + a\,e$ avec $\varphi \in C_0(X)$ et $a \in \mathbb{R}$. Cette décomposition est unique puisque si $\psi = \varphi_i + a_i\,e$ alors $(a_2 - a_1)\,e = \varphi_2 - \varphi_1 \in C_0(X)$ ce qui implique $a_2 = a_1$, puis $\varphi_2 = \varphi_1$. De plus, on a $|a| \le \limsup |\psi(x) - \varphi(x)| \le \|\psi\|$ (on peut bien sûr montrer que $\|\psi\| \sim \max(\|\varphi\|, |a|)$). On définit maintenant la forme linéaire T sur G de la manière suivante: $T(e) = 1$, $T \equiv 0$ sur $C_0(X)$. C'est une application continue puisque $\forall\, \psi = \varphi + a\,e \in G$ on a $|T(\psi)| = |a| \le \|\psi\|$. D'après la forme analytique du théorème de Hahn-Banach il existe $\tilde{T} \in (C_b(X))'$ tel que $\tilde{T}|_G = T$. Enfin $\tilde{T} \notin F$ puisque $\forall\, m$ $\tilde{T}(e\,(1 - \chi_m)) = T(e) - T(\chi_m) = 1$.

Enfin, pour tout $\tilde{T} \in (C_b(X))'$ on peut décomposer $\tilde{T} = T + (\tilde{T} - T)$ avec $T \in M^1(X)$ définie par restriction à $C_0(X)$ et $\tilde{T} - T \in \mathcal{R}(X)$. ◫

Exercice. On dit que $\varphi \in C_\ell(X)$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{k\to\infty} \|\varphi - a\|_{L^\infty(X\backslash X_k)} = 0$, on note $a = \varphi(\infty)$. Montrer que l'on peut construire $\tilde T \in (C_b(X))'$ tel que $\tilde T(\varphi) = \varphi(\infty)$ pour tout $\varphi \in C_\ell(X)$.

Compte tenu de ce résultat on peut considérer que $M^1(X) \subset (C_b(X))'$. On définit sur $(C_b(X))'$, et donc sur $M^1(X)$!, la convergence étroite comme la convergence associée à la topologie faible *-$\sigma((C_b(X))', C_b(X))$.

Lemme 3.4.4. $B_{(C_b(X))'}$ est compact pour la topologie faible *-$\sigma((C_b(X))', C_b(X))$, mais n'est pas séquentiellement compact au sens de la convergence étroite.

Preuve du Lemme 3.4.4. La compacité de la boule unité est juste le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki de compacité faible $*$ de la boule unité du dual d'un espace de Banach. Comme $C_b(X)$ n'est pas séparable, cela n'implique pas la compacité séquentielle, et effectivement la compacité séquentielle est fausse.

En effet, considérons une suite (x_m) de X telle que $x_m \in O_m := \text{int}X_m\backslash X_m$ et (T_m) la suite de $(C_b(X))'$ définie par $\langle T_m, \varphi\rangle = \varphi(x_m)$ pour tout $\varphi \in C_b(X)$. On a d'une part, $T_m \in B_{(C_b)'}$. Supposons d'autre part par l'absurde qu'il existe $T \in (C_b(X))'$ et une sous-suite (T_{m_k}) telles que $T_{m_k} \rightharpoonup T$ au sens de la convergence étroite. On définit $\psi := \sum_k (-1)^k \psi_{m_k} \in C_b(X)$ où (ψ_m) est une suite de fonctions de $C_c(X)$ telles que $\psi_m(x_m) = 1$ et $\text{supp}\,\psi_m \subset \bar O_m$. D'où la contradition puisqu'on a à la fois $\langle T_{m_k}, \psi\rangle = (-1)^k$ et $\langle T_{m_k}, \psi\rangle \to \langle T, \psi\rangle$. ◻

Lemme 3.4.5. Soit (μ_n) une suite bornée de $M^1(X)$. Alors (μ_n) est (relativement) séquentiellement compacte au sens de la convergence étroite, qui n'est autre que la convergence faible $*$-$\sigma(F, C_b(X))$, si, et seulement si, (μ_n) est tendue:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \qquad |\mu_n|(X\backslash X_m) \le \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Preuve du Lemme 3.4.5. - Supposons (0.1). Comme (μ_n) est bornée dans $M^1(X) \subset M^1_{loc}(X)$, il existe $\mu \in M^1_{loc}(X)$ et une sous-suite (μ_{n_k}) telles que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ au sens vague. De plus, pour tout m $|\mu_\pm(\chi_m)| = \lim |\mu^\pm_{n_k}(\chi_m)| \le \sup \|\mu^\pm_{n_k}\| =: M < \infty$, ce qui prouve $\mu \in M^1_{loc}(X)$. Enfin, pour $\varphi \in C_b(X)$ on a

$$|\mu(\varphi) - \mu_{n_k}(\varphi)| \le |\mu(\varphi\,\chi_m) - \mu_{n_k}(\varphi\,\chi_m)| + |\mu(\varphi\,(1-\chi_m))| + |\mu_{n_k}(\varphi\,(1-\chi_m))| \to 0$$

lorsque $k \to \infty$, puisqu'on peut rendre les deux derniers termes arbitrairement petits (pour le dernier on utilise l'hypothèse de tension).

- On suppose (μ_n) (relativement) séquentiellement compacte au sens de la convergence étroite. Si (μ_n) n'est pas tendue, on peut extraire une sous-suite, toujours notée $(\tilde\mu_n)$, qui n'est toujours pas tendue et qui converge étroitement vers une limite ν. Quitte à retrancher μ, on peut également supposer $\mu = 0$. En résumé, on construit à partir de notre suite initiale une suite (encore notée (μ_n)) telle que

$$\mu_n \rightharpoonup 0 \quad \text{étroitement, et} \quad \exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, m\; \sup_n |\mu_n|(X\backslash X_m) \ge \varepsilon. \tag{0.2}$$

On va commencer par construire par récurrence une suite $(\mu_{n_k}, \psi_k, m_k)_{k\ge 1}$ telle que $\psi_k \in C_c(X_{m_k}\backslash X_{m_{k-1}})$, $-1 \le \psi_k \le 1$ et

$$|\mu_{n_k}(\sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^\ell\, \psi_\ell)| \le \frac{\varepsilon}{5}, \quad \mu_{n_k}(\psi_k) \ge 3\,\frac{\varepsilon}{5}, \quad |\mu_{n_k}|(X\backslash X_{m_k}) \le \frac{\varepsilon}{5}. \tag{0.3}$$

A l'étape initiale, il suffit de prendre n_1 tel que $|\mu_{n_1}|(X) \ge 4\,\varepsilon/5$, puis $\psi_1 \in C_c(X)$ telle que $-1 \le \psi_1 \le 1$ et $\mu_{n_1}(\psi_1) \ge |\mu_{n_1}|(X) - \varepsilon/5$ et enfin m_1 tel que $\text{supp}\,\psi_1 \subset X_{m_1}$. La première propriété de la récurrence est vide (à l'étape $k = 1$), la seconde vient de $\mu_{n_1}(\psi_1) \ge |\mu_{n_1}|(X) - \varepsilon/5 \ge 4\,\varepsilon/5 - \varepsilon/5$ et la dernière de $|\mu_{n_1}|(X\backslash X_{m_1}) = |\mu_{n_1}|(X) - |\mu_{n_1}|(X_{m_1}) \le |\mu_{n_1}|(X) - \mu_{n_1}(\psi_1)$.

Supposons maintenant l'étape $k-1 \ge 0$ acquise et démontrons (0.3) à l'étape k. Grâce à (0.2), on fixe n_k tel que

$$|\mu_{n_k}(\sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^\ell\, \psi_\ell)| \le \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{et} \quad |\mu_{n_k}|(X\backslash X_{m_{k-1}}) \ge 4\,\frac{\varepsilon}{5}.$$

Il existe alors $\psi_k \in C_c(X\backslash X_{m_{k-1}})$ telle que $-1 \le \psi_k \le 1$ et $\mu_{n_k}(\psi_k) \ge |\mu_{n_k}|(X) - \varepsilon/5$, et enfin m_k tel que $\operatorname{supp} \psi_k \subset X_{m_k}\backslash X_{m_{k-1}}$. On conclut l'étape k comme dans la première étape, et cela termine la preuve de (0.3). On définit alors

$$\psi := \sum_\ell (-1)^\ell \, \psi_\ell$$

de sorte que pour tout $k \ge 2$

$$\eta_k := \langle \mu_{n_k}, \psi \rangle = \mu_{n_k}\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^\ell \, \psi_\ell\right) + (-1)^k \, \mu_{n_k}(\psi_k) + \mu_{n_k}\left(\sum_{\ell=k+1}^{\infty} (-1)^\ell \, \psi_\ell\right) =: \eta_k^1 + \eta_k^2 + \eta_k^3,$$

avec $|\eta_k^1| \le \varepsilon/5$, $\eta_k^2\,(-1)^k \ge 3\,\varepsilon/5$ et $|\eta_k^3| \le \varepsilon/5$. On conclut que $(-1)^k \, \eta_k \ge \varepsilon/5$ pour tout $k \ge 2$ et donc η_k ne peut pas converger, ce qui est absurde. ◫

3.5 - Les espaces $C(X)$ et $M^1_{comp}(X)$.

Lemme 3.5.1. Si T est une forme linéaire positive sur $C(X)$ alors le support de T est compact, et donc T est continue. Inversement, si T est une forme linéaire continue alors T est à support compact et donc T est la différence de deux formes linéaires continues.

Preuve du Lemme 3.5.1. Supposons que T soit positif mais ne soit pas à support compact. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\psi_m \in C(X)$, $\operatorname{supp} \psi_m \cap X_m = \emptyset$ et $\varepsilon_m := T(\psi_m) \neq 0$. On peut supposer $\varepsilon_m > 0$ et $\psi_m \ge 0$, sinon prendre $(\psi_m)_+$ ou $(\psi_m)_-$ à la place de ψ_m. On définit $\psi := \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon_m^{-1} \, \psi_m$ qui appartient à $C(X)$ car la somme est localement une somme finie. Alors pour tout M on a $T(\psi) \ge T(\sum_{m=1}^M \varepsilon_m^{-1} \, \psi_m) \ge M$, ce qui est absurde. Cela prouve qu'il existe m_0 tel que T est à support dans X_{m_0}. Pour tout $\phi \in C(X)$, puisque $(p_{X_{m_0+1}}(\phi) \pm \phi) \, \chi_{m_0} \ge 0$, on conclut que $|T(\phi)| = |T(\phi \, \chi_{m_0})| \le p_{X_{m_0+1}}(\phi) \, T(\chi_{m_0})$.
Supposons cette fois que T soit continue mais ne soit pas à support compact. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\psi_m \in C(X)$, $\operatorname{supp} \psi_m \cap X_m = \emptyset$ et $\varepsilon_m := T(\psi_m) \neq 0$. On peut supposer $\psi_m \in C_c(X)$, puisque $\psi_m \, \chi_\ell \to \psi_m$ dans $C(X)$ lorsque $\ell \to \infty$. Il existe enfin une sous-suite (ψ_{m_k}) telle que, de plus, $\operatorname{supp} \psi_{m_\ell} \cap \operatorname{supp} \psi_{m_k} = \emptyset$ si $k \neq \ell$. On définit $\psi := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{m_k}^{-1} \, \psi_{m_k}$ qui appartient à $C(X)$ car au plus un terme de la somme est non nul pour un $x \in X$ donné. On a ainsi $T(\psi) = \lim_{K\to\infty} T(\sum_{k=1}^K \varepsilon_{m_k}^{-1} \, \psi_{m_k}) = \lim_{K\to\infty} K$, ce qui est absurde. On conclut comme précédemment. [Remarque. La preuve classique est de dire que d'après la caractérisation des formes linéaires continues dans un eàsn, il existe m (les (p_{X_m}) sont ordonnés!) et $C_m \ge 0$ tels que $\forall \, \varphi \in C(X)$ $|T(\varphi)| \le C_m \, p_{X_m}(\varphi)$, et donc $\operatorname{supp} T \subset X_m$]. Si X_{m_0} est le support de T, il suffit de se restreindre aux fonctions de $C_{X_{m_0+1}}(X)$ et d'appliquer le théorème de décomposition de la section 2. ◫

Nous laissons au lecteur le soin de formuler (les preuves sont immédiates) les résultats de représentation et de compacité dans le cadre des fonctions $C(X)$.

4. Quelques compléments.

4.1 - Espace de Holder.

4.2 - Les masses de Dirac sont denses dans $B_{C(X)}$. Théorème de Krein-Milman voir Yosida p. 362

Théorème (Krein-Milman pour les mesures). Les combinaisons convexes de masses de Dirac sont denses au sens de la convergence faible $*$-$\sigma(M^1(X), C(X))$ dans $M^1(X)$.

Preuve du Théorème. Pour tout k, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ et $(x_i^k)_{1\le i\le N_k}$ une suite de X tels que $X \subset \cup B(x_i^k, 1/k)$, puis il existe une suite (φ_i^k) de $C(X)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi_i^k \subset B(x_i^k, 1/k)$, $0 \le \varphi_i^k \le 1$ et $\sum_{i=1}^{N_k} \varphi_i^k = 1$. On pose

$$\mu_k := \sum_{i=1}^{N_k} \mu(\varphi_i^k) \, \delta_{x_i^k}.$$

Pour tout $\psi \in C(X)$ on a alors

$$\langle \mu_k, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{N_k} \mu(\varphi_i^k)\,\psi(x_i^k) = \langle \mu, \psi^k \rangle \quad \text{avec} \quad \psi^k := \sum_{i=1}^{N_k} \psi(x_i^k)\,\varphi_i^k.$$

Or, pour tout $x \in X$, on a

$$\left|\psi(x) - \psi^k(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N_k} (\psi(x) - \psi(x_i^k))\,\varphi_i^k(x)\right| \le \sum_{i=1}^{N_k} \sup_{1 \le i \le N_k} \|\psi - \psi(x_i^k)\|_{L^\infty(B(x_i^k,1/k))}\,\varphi_i^k(x) \le \omega(1/k) \to 0$$

lorsque $k \to \infty$, où ω désigne un module de continuité de ψ. On en déduit que $\langle \mu_k, \psi \rangle \to \langle \mu, \psi \rangle$. ◻

Définition. Soit E un evn et $K \subset E$ un convexe compact (donc non vide). On dit que $M \subset K$ est un *ensemble extrémal de* K si pour tout $x, y \in K$, $t \in (0,1)$ on a $(1-t)\,x + t\,y \in M$ implique $x, y \in M$. Si $M = \{x\}$ est un ensemble extrémal on dit que x est un *point extrémal*.

Idée fondamentale. L'idée fondamentale est de couper un ensemble convexe compact non vide K par des hyperplans $H_\alpha := [f = \alpha]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et tout $f \in E' \backslash \{0\}$ fixé. Alors les deux hyperplans extrèmes pour lesquels l'intersection n'est pas vide sont des sous-ensembles extrémaux:

$$K_f^+ := \{x,\ f(x) = \max_{y \in K} f(y)\}, \quad K_f^- := \{x,\ f(x) = \min_{y \in K} f(y)\}.$$

En itérant, on trouve ainsi des singletons qui sont des points extrémaux.

Lemme (de Krein-Milman). Tout convexe compact (non vide) K d'un evn E admet au moins un point extrémal.

Preuve du Lemme de Krein-Milman. On note $\mathcal{M}$ la collection des ensembles compacts extrémaux de K. On a $K \in \mathcal{M}$. Sous (M_i) une famille totalement ordonée (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors $\bar{M} := \cap M_i$ est un compact, convexe, non vide. C'est également un ensemble extrémal qui est un minorant de la famille (M_i). $\mathcal{M}$ est donc un ensemble inductif, et par le lemme de Zorn, $\mathcal{M}$ admet au moins un élement minimal, notons le M_1. Montrons que $M_1 = \{x_1\}$. En effet, s'il existe $x_2 \in M_1$, $x_2 \neq x_1$, il existe $f \in E'$ qui sépare $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ et donc on peut supposer $\langle f, x_1 \rangle < \langle f, x_2 \rangle$. On définit

$$M_0 := \{x \in M_1;\ \langle f, x \rangle = m_1 := \inf_{y \in M_1} \langle f, y \rangle\}.$$

On a $M_0 \subset M_1$, $M_0 \neq M_1$ (puisque $x_2 \notin M_0$), M_0 est non vide, convexe, compact, et M_0 est un ensemble extrémal. En effet, si $x, y \in K$, $t \in (0,1)$ et $(1-t)\,x + t\,y \in M_0 \subset M_1$ alors $x, y \in M_1$ (puisque M_1 est extrémal) et alors, par définition de M_0, on doit avoir $\langle f, x \rangle = \langle f, y \rangle = m_1$, ce qui implique $x, y \in M_0$. Cela contredit la "minimalité" de M_1. En conclusion M_1 est un singleton. ◻

Théorème (Krein-Milman cadre abstrait). Soit K un convexe compact (non vide) d'un evn E et soit A l'ensemble (non vide!) de ses points extrémaux. Alors K est l'adhérance de l'enveloppe convexe de A: $K = \overline{\text{conv}(A)}$.

Preuve du théorème de Krein-Milman. L'inclusion $\overline{\text{conv}(A)} \subset K$ est claire. Supposons par l'absurde qu'il existe $b \in K \backslash \overline{\text{conv}(A)}$. Alors, par la deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$, $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, a \in \overline{\text{conv}(A)} \qquad \langle f, a \rangle \le \ell < \langle f, b \rangle.$$

On définit $L := \{x \in K;\ f(x) = m := \sup_{y \in K} f(y)\}$. De $m \ge \langle f, b \rangle > \ell$ on déduit que $L \cap A = \emptyset$. De plus, il est clair que L est un sous-ensemble compact convexe (non vide) de K, et est un ensemble extrémal de K. Par le lemme de Krein-Milman il existe $c \in L$ élément extrémal de L, donc également élément extrémal de K. Cela implique $c \in A \cap L$, ce qui est absurde. ◻

Corollaire (Krein-Milman pour les mesures). Les masses de Dirac sont les éléments extrémaux de mesures Borélienne, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des mesures de Dirac. Donc $B_{M^1} = \overline{\text{conv}(\mathcal{D})}$ et toute mesure est la limite faible-$*$ $\sigma(M^1(X), C(X))$ d'une suite de combinaisons convexes de masses de Dirac.

4.3 - Premier lemme de Compacité-concentration.

Bibliographie.

Pour des rśultats "élémentaires" concernant les compacts et les fonctions continues on peut consulter [Qe] et [Pe], par exemple. Pour des résultats sur les espaces de mesures de Radon on renvoie à [Ma], [HL], mais également à [Vi], [LL].

[Qe]Hervé Queffélec, Topologie - Cours et exercices corrigés, Dunod 2007

[HL] Hirsch, Lacombe, Eléments d'Analyse Fonctionnelle, Dunod 1999

[LL] Lieb, Loss, Analysis, AMS

[Ma] P. Malliavin, Intégration et probabilités : analyse de Fourier et analyse spectrale, Masson 1982

[Pe] B. Perthame, Topologie et analyse diffrentielle (ENS, 1ere annee), http://www.ann.jussieu.fr/˜perthame/cours_analyse.pdf

[Vi] C. Villani, Cours d'Intégration et Analyse de Fourier, http://www.umpa.ens-lyon.fr/˜cvillani/Cours/iaf-2007.html