Corrigé (succinct) de l'examen d'appel du 2 juillet 2024

Exercice 1 (classement de pages web). On considère un modèle pour déterminer la notoriété d'un groupe de pages web. Celui-ci assigne à toute page P du groupe un indice de notoriété $\text{PR}(P)$ donné par la formule :

$$\text{PR}(P) = 0,2 + 0,8\left(\frac{\text{PR}(P_1)}{N(P_1)} + \cdots + \frac{\text{PR}(P_{k(P)})}{N(P_{k(P)})}\right),$$

dans laquelle P_i, $1 \leq i \leq k(P)$, désigne l'une des $k(P)$ pages du groupe possédant un lien pointant vers P et où $N(P_i)$ est le nombre de liens que contient la page P_i.

1. On considère tout d'abord un groupe de quatre pages P_1, P_2, P_3 et P_4, dans lequel la page P_1 pointe vers les pages P_2, P_3 et P_4, la page P_2 pointe vers P_1, P_3 et P_4, la page P_3 pointe vers P_1, P_2 et P_4 et la page P_4 pointe vers P_1, P_2 et P_3. Écrire dans ce cas le système d'équations linéaires satisfait par les inconnues $\text{PR}(P_1)$, $\text{PR}(P_2)$, $\text{PR}(P_3)$ et $\text{PR}(P_4)$.

Puisque chaque page pointe vers les trois autres, on a $N(P_1) = N(P_2) = N(P_3) = N(P_4) = 3$, d'où

$$\begin{aligned}
\text{PR}(P_1) &= 0,2 + 0,8\left(\frac{\text{PR}(P_2)}{3} + \frac{\text{PR}(P_3)}{3} + \frac{\text{PR}(P_4)}{3}\right),\\
\text{PR}(P_2) &= 0,2 + 0,8\left(\frac{\text{PR}(P_1)}{3} + \frac{\text{PR}(P_3)}{3} + \frac{\text{PR}(P_4)}{3}\right),\\
\text{PR}(P_3) &= 0,2 + 0,8\left(\frac{\text{PR}(P_1)}{3} + \frac{\text{PR}(P_2)}{3} + \frac{\text{PR}(P_4)}{3}\right),\\
\text{PR}(P_4) &= 0,2 + 0,8\left(\frac{\text{PR}(P_1)}{3} + \frac{\text{PR}(P_2)}{3} + \frac{\text{PR}(P_3)}{3}\right),
\end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{array}{rrrrl}
 & \text{PR}(P_1) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_2) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_3) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_4) = 0,2,\\
-\frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_1) + & \text{PR}(P_2) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_3) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_4) = 0,2,\\
-\frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_1) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_2) + & \text{PR}(P_3) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_4) = 0,2,\\
-\frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_1) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_2) - \frac{0,8}{3} & \text{PR}(P_3) + & \text{PR}(P_4) = 0,2.
\end{array}$$

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Généraliser le cas précédent à un groupe de n pages web $P_1, \ldots, P_n$, dans lequel toute page du groupe pointe uniquement vers les $n-1$ autres pages du groupe, en donnant la matrice et le second membre associés au système linéaire résultant.

Puisque chacune des n pages pointe vers les $n-1$ autres, on a que $N(P_i) = n-1$ pour tout entier i entre 1 et n. En tenant compte de la forme du système linéaire obtenu dans la question précédente et en posant $a = -\frac{0,8}{n-1}$, on trouve respectivement la matrice d'ordre n et le second membre

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0,2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit a un nombre réel non nul. Montrer que les valeurs propres de la matrice d'ordre n

$$\begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$$

sont égales à $(n-1)a$ et $-a$ (d'ordre de multiplicité égal à $n-1$).

Si l'on ajoute la matrice aI_n à la matrice considérée, on obtient une matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à a, qui est un réel non nul. La matrice résultante est donc une matrice de rang valant 1, ce qui fait que son noyau est de dimension égale à $n-1$. Il en découle que $-a$ est une valeur propre de la matrice considérée, d'ordre de multiplicité égal à $n-1$. On remarque également que les sommes des coefficients des lignes de la matrice sont toutes égales à $(n-1)a$, ce qui fournit la dernière valeur propre.

4. Montrer que la matrice du système linéaire obtenu dans la question 2 est réelle symétrique définie positive (on pourra pour cela utiliser le résultat de la question précédente). Indiquer, en justifiant le choix, quelle méthode directe il convient d'utiliser pour la résolution numérique de ce système.

Il est clair que la matrice $M(a)$ est réelle symétrique. En utilisant le résultat de la question précédente, on montre que ses valeurs propres sont $1+(n-1)a$ et $1-a$, avec $a=-\frac{0,8}{n-1}$. On a donc $1-a=1+\frac{0,8}{n-1}>0$ et $1+(n-1)a=0,2>0$. Les valeurs propres de la matrice étant strictement positives, celle-ci est définie positive. Pour la resolution numérique du système linéaire associée, on utilisera préférentiellement la factorisation de Cholesky, dont le coût est environ deux fois moindre que celui de la factorisation LU lorsque n est grand.

5. Donner les équations vérifiées par les coefficients de la matrice B de la factorisation de Cholesky de la matrice d'ordre n réelle symétrique définie positive

$$M(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

La factorisation de Cholesky écrit la matrice $M(a)$ sous la forme du produit $M(a)=BB^\top$, où B est une matrice triangulaire inférieure que l'on construit colonne par colonne. En particularisant les formules du cours au cas de la matrice $M(a)$, on trouve que les coefficients de la j^{e} colonne de B satisfont les équations suivantes

$$b_{jj}=\sqrt{1-\sum_{k=1}^{j-1}(b_{jk})^2},\ b_{j+1j}=\frac{a-\sum_{k=1}^{j-1}b_{jk}b_{j+1k}}{b_{jj}},\ldots,\ b_{nj}=\frac{a-\sum_{k=1}^{j-1}b_{jk}b_{nk}}{b_{jj}}.$$

6. Justifier, en donnant un un argument simple, que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi appliquées à la résolution numérique du système obtenu à la question 2 sont convergentes. Que vaut le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Jacobi ? Pour $n=5$, 10, 20 et 40, le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel vaut approximativement et respectivement $0,6461$, $0,6481$, $0,649$ et $0,6495$. Laquelle de ces deux méthodes itératives vaut-il mieux utiliser pour la résolution numérique du système dans ces cas ?

La matrice $M(a)$ est à diagonale strictement dominante par lignes, car $(n-1)\,|a|=0,8<1$, et on sait alors par un théorème du cours que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi appliquées à la résolution numérique du système sont convergentes. La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est l'opposée de la matrice considérée dans la question 3. On utilisant le résultat de cette question, on obtient que son rayon spectral vaut $\max(|-a|,(n-1)\,|a|)=0,8$. Puisque le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel est strictement inférieur à cette valeur quelle que soit la valeur de n considérée, on en déduit qu'il vaut mieux utiliser la méthode de Gauss–Seidel.

7. Donner la solution (évidente) du système linéaire obtenu à la question 2 et l'interpréter.

La solution du système est $\mathrm{PR}(P_i)=1$ pour tout entier i entre 1 et n. Toutes les pages du groupe ont par conséquent la même notoriété, ce qu'on pouvait deviner puisqu'il y a un même nombre de pages pointant sur chacune.

Exercice 2 (méthode de Ridders). Introduite en 1979, la méthode de Ridders permet d'approcher numériquement un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle f continue, en lequel la fonction change de signe. Elle est basée sur la méthode de la fausse position et l'utilisation d'une fonction exponentielle.
Soit k entier naturel non nul. À l'étape k de la méthode, on suppose que le zéro que l'on veut approcher est strictement encadré

par les réels $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, ce qui signifie encore que $f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})<0$. On introduit alors le point milieu $x_m=\frac{1}{2}\left(x^{(k-1)}+x^{(k)}\right)$ et la fonction $h(x)=f(x)\exp\left(\alpha\left(x-x^{(k-1)}\right)\right)$, dans laquelle le réel α est choisi de manière à ce que

$$h(x_m)=\frac{1}{2}\left(h(x^{(k-1)})+h(x^{(k)})\right).$$

1. Montrer que la quantité $\exp\left(\alpha\left(x_m-x^{(k-1)}\right)\right)$ est solution de l'équation quadratique

$$\frac{1}{2}f(x^{(k)})\,x^2-f(x_m)\,x+\frac{1}{2}f(x^{(k-1)})=0,$$

   et justifier que

$$\exp\left(\alpha\left(x_m-x^{(k-1)}\right)\right)=\frac{f(x_m)-\text{sign}(f(x^{(k-1)}))\sqrt{f(x_m)^2-f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}{f(x^{(k)})},$$

   où $\text{sign}(f(x^{(k-1)}))$ désigne le signe de $f(x^{(k-1)})$.

En remplaçant h par son expression dans l'égalité permetttant de déterminer α, on trouve

$$f(x_m)\exp\left(\alpha\left(x_m-x^{(k-1)}\right)\right)=\frac{1}{2}f(x^{(k)})\exp\left(\alpha\left(x^{(k)}-x^{(k-1)}\right)\right)+\frac{1}{2}f(x^{(k-1)}),$$

soit encore, compte tenu du fait que x_m est le point milieu entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$,

$$\frac{1}{2}f(x^{(k)})\exp\left(2\alpha\left(x_m-x^{(k-1)}\right)\right)-f(x_m)\exp\left(\alpha\left(x_m-x^{(k-1)}\right)\right)+\frac{1}{2}f(x^{(k-1)})=0.$$

On arrive alors à l'équation par propriété de la fonction exponentielle. Le discriminant de l'équation quadratique vaut $f(x_m)^2-f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})$ et est strictement positif puisque $f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})<0$. Il existe par conséquent deux solutions, de la forme

$$\frac{f(x_m)\pm\sqrt{f(x_m)^2-f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}{f(x^{(k)})},$$

le signe du numérateur étant celui se trouvant devant la racine carrée. La stricte positivité de la fonction exponentielle imposant que le numérateur et le dénominateur dans cette fraction soient du même signe, on doit avoir

$$\exp\left(\alpha\left(x_m^{(k)}-x^{(k-1)}\right)\right)=\frac{f(x_m)+\text{sign}(f(x^{(k)}))\sqrt{f(x_m^{(k)})^2-f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}{f(x^{(k)})},$$

où $\text{sign}(f(x^{(k)}))$ désigne le signe de $f(x^{(k)})$. On conclut en utilisant que $f(x^{(k-1)})$ et $f(x^{(k)})$ sont de signes opposés.
La nouvelle approximation du zéro, notée $x^{(k+1)}$, est ensuite obtenue en appliquant une étape de la méthode de la fausse position à la fonction h sur l'intervalle courant borné par $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$.

2. Après avoir justifié que la construction de cette nouvelle approximation est possible, montrer que

$$x^{(k+1)}=\frac{h(x^{(k-1)})x_m-h(x_m)x^{(k-1)}}{h(x^{(k-1)})-h(x_m)},$$

   puis que

$$x^{(k+1)}=x_m+\text{sign}(f(x^{(k-1)}))\frac{f(x_m)(x_m-x^{(k-1)})}{\sqrt{f(x_m)^2-f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}.$$

La multiplication de f par une fonction exponentielle laissant inchangé le signe de la fonction aux bornes de l'intervalle, il est licite d'appliquer la méthode de la fausse position à la fonction h. Les expressions données dans le cours pour l'approximation $x^{(k+1)}$ fournissent alors la première égalité. On se sert ensuite de la définition de h et de l'expression pour $\exp\left(\alpha\left(x_m^{(k)}-x^{(k-1)}\right)\right)$ précédemment obtenue pour arriver à la seconde.
La mise à jour de l'intervalle d'encadrement se fait alors de la manière suivante. Dans le cas favorable où le zéro se trouve entre x_m et $x^{(k+1)}$, ces deux points deviennent les prochaines bornes de l'intervalle d'encadrement. Sinon, le point $x^{(k+1)}$ est pris comme borne tandis que l'une des précédentes bornes, $x^{(k-1)}$ ou $x^{(k)}$, est conservée de sorte que le zéro soit encadré à l'étape suivante.

3. Modifier le code Python de la fonction ci-dessous, qui met en œuvre la méthode de la fausse position, de manière à ce qu'elle mette en œuvre la méthode de Ridders. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code. À toutes fins utiles, on indique que le signe d'un nombre peut être obtenu avec la fonction `sign` de NumPy.

```
1  def regulafalsi(f,a,b,tol,itermax):
2      fkm1,fk=f(a),f(b)
3      if fkm1*fk>0:
4          raise ValueError('Le␣signe␣de␣la␣fonction␣doit␣différer␣en␣chaque␣borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xkp1=(xk*fkm1-xkm1*fk)/(fkm1-fk)
9      fkp1=f(xkp1)
10     while ((abs(fk)>=tol or inc[-1]>=tol) and iter<=itermax):
11         iter=iter+1
12         if fkp1*fk<0.:
13             xkm1=xk
14             fkm1=fk
15         elif fkp1==0.:
16             return [xkp1,iter,fkp1,inc]
17         inc.append(abs(xk-xkp1))
18         xk=xkp1
19         fk=fkp1
20         xkp1=(xk*fkm1-xkm1*fk)/(fkm1-fk)
21         fkp1=f(xkp1)
22     if iter>itermax:
23         print('Le␣nombre␣maximum␣d\'itérations␣a␣été␣atteint.')
24     return [xkp1,iter,fkp1,inc]
```

On modifie tout d'abord le nom de la fonction à la ligne 1. On introduit ensuite le calcul du point milieu et de la nouvelle approximation, ainsi que les évaluations de f correspondantes, en remplaçant les lignes 8 et 9 du code par les lignes 8 à 12 du code ci-dessous. La détermination de la borne d'encadrement à modifier est faite en remplaçant les lignes 12 à 16 du code par les lignes 15 à 23 du code ci-dessous, le cas où le zéro se trouve entre le point milieu et la nouvelle approximation s'ajoutant aux cas précédemment considérés. Enfin, on remplace les lignes 20 et 21 du code par les lignes 27 à 31 du code ci-dessous pour achever de mettre à jour les bornes et calculer le nouveau point milieu et la nouvelle approximation. On remarque que deux évaluations de f sont nécessaires à chaque étape.

```
1  def ridders(f,a,b,tol,itermax):
2      fkm1,fk=f(a),f(b)
3      if fkm1*fk>0:
4          raise ValueError('Le␣signe␣de␣la␣fonction␣doit␣différer␣en␣chaque␣borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xm=0.5*(xk+xkm1)
9      fm=f(xm)
10     s=np.sqrt(fm**2-fkm1*fk)
11     xkp1=xm+np.sign(fkm1)*fm*(xm-xkm1)/s
12     fkp1=f(xkp1)
13     while ((abs(fkp1)>=tol or inc[-1]>=tol) and iter<=itermax):
14         iter=iter+1
15         if fm*fkp1>0:
16             if fk*fkp1<0:
17                xkm1=xk
18                fkm1=fk
19         elif fm*fkp1<0:
20             xkm1=xm
21             fkm1=fm
22         else:
23             return [xkp1,iter,fkp1,inc]
24         inc.append(abs(xk-xkp1))
25         xk=xkp1
26         fk=fkp1
27         xm=0.5*(xk+xkm1)
28         fm=f(xm)
29         s=np.sqrt(fm**2-fkm1*fk)
30         xkp1=xm+np.sign(fkm1)*fm*(xm-xkm1)/s
```

```
        fkp1=f(xkp1)
    if iter>itermax:
        print('Le nombre maximum d\'itérations a été atteint.')
    return [xkp1,iter,fkp1,inc]
```

Exercice 3 (convergence de l'interpolation de Lagrange). L'entier naturel n étant donné, on considère le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_n f$ d'une fonction f aux $n+1$ nœuds $x_0,\dots,x_n$, supposés distincts et contenus dans un intervalle $[a,b]$ non vide borné de $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,b]$. Rappeler le résultat du cours pour l'erreur d'interpolation de f par $\Pi_n f$ sur l'intervalle $[a,b]$.

Le résultat est le suivant : pour tout x appartenant à $[a,b]$, il existe un réel ξ contenu dans l'intérieur du plus petit intervalle contenant $x_0,\dots,x_n$ et x, tel que l'erreur d'interpolation au point x est donnée par

$$f(x)-\Pi_n f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x),$$

où ω_{n+1} est le polynôme de Newton de degré $n+1$ associé à la famille $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$, $\omega_{n+1}(x^)=\prod_{i=0}^{n}(x-xi)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose l'entier naturel n non nul et l'on pose $f(x)=xe^{2x}$, $a=-2$, $b=1$, $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, $i=0,\dots,n$.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, on a

$$\forall x\in[-2,1],\ f^{(k)}(x)=2^{k-1}e^{2x}(2x+k)$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de la fonction f.

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ en tant que produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle, on peut raisonner par récurrence sur l'entier naturel non nul k. Pour $k=1$, on a, en utilisant les formules pour la dérivée d'un produit de fonctions et la composée de fonctions,

$$\forall x\in[-2,1],\ f'(x)=e^{2x}(2x+1).$$

On suppose à présent que l'expression est vraie pour un entier naturel k non nul. On a

$$\forall x\in[-2,1],\ f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)})'(x)=2e^{2x}(2^{k-1}(2x+k))+2(2^{k-1}e^{2x})=2^k e^{2x}(2x+k+1),$$

ce qui achève la preuve.

3. En déduire que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4, on a

$$\forall x\in[-2,1],\ \left|f^{(k)}(x)\right|\leq 2^{k-1}e^2(2+k).$$

Si l'entier k est supérieur ou égal à 4, on a

$$\forall x\in[-2,1],\ |2x+k|=2x+k\leq 2+k.$$

La fonction $x\mapsto e^{2x}$ étant positive et strictement croissante sur l'intervalle $[-2,1]$, elle est majorée par sa valeur en $x=1$. On déduit alors la majoration de l'expression obtenue dans la question précédente.

4. Montrer enfin que

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{x\in[-2,1]}|f(x)-\Pi_n f(x)|=0.$$

On a

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ -1\leq x_i\leq 2\implies\forall x\in[-2,1],\ \forall i\in\{0,\dots,n\},\ -3\leq x-x_i\leq 3.$$

On peut ainsi majorer la valeur absolue du polynôme de Newton sur l'intervalle $[-2,1]$ par 3^{n+1}. En utilisant le résultat rappelé dans la première question et le résultat de la question précédente, on trouve alors, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sup_{x\in[-2,1]}|f(x)-\Pi_n f(x)|\leq\frac{2^n e^2(n+3)}{(n+1)!}3^{n+1}=\frac{3e^2 6^n(n+3)}{(n+1)!}\leq\frac{6e^2 6^n}{n!}.$$

La suite de terme général $\frac{6^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque la série qui lui est associée est convergente ($\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6^n}{n!}=e^6$), d'où la conclusion.