Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Méthodes numériques
année 2023/2024

Examen d'appel du 2 juillet 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (classement de pages web, 10 points). On considère un modèle pour déterminer la notoriété d'un groupe de pages web. Celui-ci assigne à toute page P du groupe un indice de notoriété $\mathrm{PR}(P)$ donné par la formule :

$$\mathrm{PR}(P) = 0,2 + 0,8\left(\frac{\mathrm{PR}(P_1)}{N(P_1)} + \dots + \frac{\mathrm{PR}(P_{k(P)})}{N(P_{k(P)})}\right),$$

dans laquelle P_i, $1 \leq i \leq k(P)$, désigne l'une des $k(P)$ pages du groupe possédant un lien pointant vers P et où $N(P_i)$ est le nombre de liens que contient la page P_i.

1. On considère tout d'abord un groupe de quatre pages P_1, P_2, P_3 et P_4, dans lequel la page P_1 pointe vers les pages P_2, P_3 et P_4, la page P_2 pointe vers P_1, P_3 et P_4, la page P_3 pointe vers P_1, P_2 et P_4 et la page P_4 pointe vers P_1, P_2 et P_3. Écrire dans ce cas le système d'équations linéaires satisfait par les inconnues $\mathrm{PR}(P_1)$, $\mathrm{PR}(P_2)$, $\mathrm{PR}(P_3)$ et $\mathrm{PR}(P_4)$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Généraliser le cas précédent à un groupe de n pages web $P_1, \dots, P_n$, dans lequel toute page du groupe pointe uniquement vers les $n-1$ autres pages du groupe, en donnant la matrice et le second membre associés au système linéaire résultant.
3. Soit a un nombre réel non nul. Montrer que les valeurs propres de la matrice d'ordre n

$$\begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$$

   sont égales à $(n-1)a$ et $-a$ (d'ordre de multiplicité égal à $n-1$).
4. Montrer que la matrice du système linéaire obtenu dans la question 2 est réelle symétrique définie positive (on pourra pour cela utiliser le résultat de la question précédente). Indiquer, en justifiant le choix, quelle méthode directe il convient d'utiliser pour la résolution numérique de ce système.
5. Donner les équations vérifiées par les coefficients de la matrice B de la factorisation de Cholesky de la matrice d'ordre n réelle symétrique définie positive

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Justifier, en donnant un un argument simple, que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi appliquées à la résolution numérique du système obtenu à la question 2 sont convergentes. Que vaut le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Jacobi ? Pour $n = 5$, 10, 20 et 40, le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel vaut approximativement et respectivement $0,6461$, $0,6481$, $0,649$ et $0,6495$. Laquelle de ces deux méthodes itératives vaut-il mieux utiliser pour la résolution numérique du système dans ces cas ?
7. Donner la solution (évidente) du système linéaire obtenu à la question 2 et l'interpréter.

Exercice 2 (méthode de Ridders, 6 points). Introduite en 1979, la méthode de Ridders permet d'approcher numériquement un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle f continue, en lequel la fonction change de signe. Elle est basée sur la méthode de la fausse position et l'utilisation d'une fonction exponentielle.

Soit k entier naturel non nul. À l'étape k de la méthode, on suppose que le zéro que l'on veut approcher est strictement encadré par les réels $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, ce qui signifie encore que $f(x^{(k-1)})f(x^{(k)}) < 0$. On introduit alors le point milieu $x_m = \frac{1}{2}\left(x^{(k-1)} + x^{(k)}\right)$ et la fonction $h(x) = f(x)\exp\left(\alpha\left(x - x^{(k-1)}\right)\right)$, dans laquelle le réel α est choisi de manière à ce que

$$h(x_m) = \frac{1}{2}\left(h(x^{(k-1)}) + h(x^{(k)})\right).$$

1. Montrer que la quantité $\exp\left(\alpha\left(x_m - x^{(k-1)}\right)\right)$ est solution de l'équation quadratique

$$\frac{1}{2}f(x^{(k)})\,x^2 - f(x_m)\,x + \frac{1}{2}f(x^{(k-1)}) = 0,$$

   et justifier que

$$\exp\left(\alpha\left(x_m - x^{(k-1)}\right)\right) = \frac{f(x_m) - \operatorname{sign}(f(x^{(k-1)}))\sqrt{f(x_m)^2 - f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}{f(x^{(k)})},$$

   où $\operatorname{sign}(f(x^{(k-1)}))$ désigne le signe de $f(x^{(k-1)})$.

La nouvelle approximation du zéro, notée $x^{(k+1)}$, est ensuite obtenue en appliquant une étape de la méthode de la fausse position à la fonction h sur l'intervalle courant borné par $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$.

2. Après avoir justifié que la construction de cette nouvelle approximation est possible, montrer que

$$x^{(k+1)} = \frac{h(x^{(k-1)})x_m - h(x_m)x^{(k-1)}}{h(x^{(k-1)}) - h(x_m)},$$

   puis que

$$x^{(k+1)} = x_m + \operatorname{sign}(f(x^{(k-1)}))\frac{f(x_m)(x_m - x^{(k-1)})}{\sqrt{f(x_m)^2 - f(x^{(k-1)})f(x^{(k)})}}.$$

La mise à jour de l'intervalle d'encadrement se fait alors de la manière suivante. Dans le cas favorable où le zéro se trouve entre x_m et $x^{(k+1)}$, ces deux points deviennent les prochaines bornes de l'intervalle d'encadrement. Sinon, le point $x^{(k+1)}$ est pris comme borne tandis que l'une des précédentes bornes, $x^{(k-1)}$ ou $x^{(k)}$, est conservée de sorte que le zéro soit encadré à l'étape suivante.

3. Modifier le code Python de la fonction ci-dessous, qui met en œuvre la méthode de la fausse position, de manière à ce qu'elle mette en œuvre la méthode de Ridders. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code. À toutes fins utiles, on indique que le signe d'un nombre peut être obtenu avec la fonction `sign` de NumPy.

```
1  def regulafalsi(f,a,b,tol,itermax):
2      fkm1,fk=f(a),f(b)
3      if fkm1*fk>0:
4          raise ValueError('Le signe de la fonction doit différer en chaque borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xkp1=(xk*fkm1-xkm1*fk)/(fkm1-fk)
9      fkp1=f(xkp1)
10     while ((abs(fk)>=tol or inc[-1]>=tol) and iter<=itermax):
11         iter=iter+1
12         if fkp1*fk<0.:
13             xkm1=xk
14             fkm1=fk
15         elif fkp1==0.:
16             return [xkp1,iter,fkp1,inc]
17         inc.append(abs(xk-xkp1))
18         xk=xkp1
19         fk=fkp1
20         xkp1=(xk*fkm1-xkm1*fk)/(fkm1-fk)
21         fkp1=f(xkp1)
22     if iter>itermax:
23         print('Le nombre maximum d\'itérations a été atteint.')
24     return [xkp1,iter,fkp1,inc]
```

Exercice 3 (convergence de l'interpolation de Lagrange, 4 points). L'entier naturel n étant donné, on considère le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_n f$ d'une fonction f aux $n+1$ nœuds $x_0, \dots, x_n$, supposés distincts et contenus dans un intervalle $[a,b]$ non vide borné de $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,b]$. Rappeler le résultat du cours pour l'erreur d'interpolation de f par $\Pi_n f$ sur l'intervalle $[a,b]$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose l'entier naturel n non nul et l'on pose $f(x) = xe^{2x}$, $a = -2$, $b = 1$, $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, on a
$$\forall x \in [-2,1],\ f^{(k)}(x) = 2^{k-1} e^{2x}(2x+k)$$
où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de la fonction f.
3. En déduire que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4, on a
$$\forall x \in [-2,1],\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq 2^{k-1} e^2 (2+k).$$
4. Montrer enfin que
$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [-2,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)| = 0.$$