Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Méthodes numériques
année 2023/2024

Examen du 29 mai 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (méthode des directions alternées, 10 points). Soit n un entier naturel non nul et γ un nombre réel strictement positif. Dans la suite, on note $\|\cdot\|_2$ à la fois la norme euclidienne sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme matricielle subordonnée sur $M_n(\mathbb{R})$ qui lui est associée.

1. **Questions préliminaires.** Soit C une matrice réelle d'ordre n symétrique positive.
   (a) Montrer que la matrice $\gamma I_n + C$ est inversible et que la matrice $D = (\gamma I_n - C)(\gamma I_n + C)^{-1}$ est symétrique.
   (b) Montrer que $\|D\|_2 \leq 1$, puis que $\|D\|_2 = 1$ si et seulement si 1 est valeur propre de D.

   On suppose à présent que 1 est valeur propre de D.
   (c) Montrer que le sous-espace propre de D associé à 1 est un sous-espace vectoriel du noyau de C.
   (d) Montrer enfin qu'une matrice x de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\|x\|_2 = 1$ et $\|Dx\|_2 = 1$ est un vecteur propre de D associé à 1. On pourra pour cela (en le justifiant) décomposer x dans une base orthonormée formée de vecteur propres de D.

Soit A une matrice réelle d'ordre n symétrique définie positive, C_1 et C_2 deux matrices réelles d'ordre n symétriques positives telles que que $A = C_1 + C_2$. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec b une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, par la méthode itérative définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (\gamma I_n + C_1)\, x^{(k+\frac{1}{2})} = (\gamma I_n - C_2)\, x^{(k)} + b,\ (\gamma I_n + C_2)\, x^{(k+1)} = (\gamma I_n - C_1)\, x^{(k+\frac{1}{2})} + b.$$

l'approximation initiale $x^{(0)}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ étant donnée.

2. Déterminer des matrices B de $M_n(\mathbb{R})$ et c de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = B\, x^{(k)} + c.$$
3. On pose $D_1 = (\gamma I_n - C_1)(\gamma I_n + C_1)^{-1}$ et $D_2 = (\gamma I_n - C_2)(\gamma I_n + C_2)^{-1}$. Montrer que
$$\rho(B) \leq \|D_1 D_2\|_2 \leq 1,$$
   où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B.
4. On souhaite à présent montrer que $\rho(B) < 1$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $\rho(B) = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\|D_1 D_2\|_2 = \|D_2 y\|_2 = \|y\|_2 = 1$.
   (b) Que dire alors de $\|D_1 y\|_2$?
   (c) En déduire que y appartient à $\mathrm{Ker}(C_1) \cap \mathrm{Ker}(C_2)$ et obtenir une contradiction.
5. Montrer enfin que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode est convergente, de limite égale à la solution du système linéaire $Ax = b$.

Exercice 2 (une caractérisation du polynôme d'interpolation de Lagrange, 1 point). Soit n un entier naturel. Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction polynomiale p est le reste de de la division euclidienne de p par $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, où les réels $x_0, \dots, x_n$ sont les nœuds d'interpolation.

Exercice 3 (formules de quadrature avec correction aux extrémités, 5 points). Soit $[a, b]$ un intervalle d'intérieur non vide et borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Pour l'approximation de l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on considère la *règle du point milieu avec correction aux extrémités* donnée par :

$$I_{1,\mathrm{cor}}(f; a, b) = (b - a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24}\left(f'(b) - f'(a)\right).$$

1. Rappeler la valeur du degré d'exactitude de la règle du point milieu et déterminer celle de cette version modifiée.
   Indication : on pourra considérer le cas $a = -1$ et $b = 1$ pour obtenir un contre-exemple à l'exactitude de la formule.

La règle de Simpson peut être corrigée de façon similaire pour obtenir une formule dont le degré d'exactitude vaut cinq, moyennant cependant un changement dans les poids de quadrature de la formule originelle. On pose alors :

$$I_{2,\text{cor}}(f\,;a,b) = \frac{b-a}{2}\left(\alpha f(a) + \beta f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha f(b)\right) + \frac{(b-a)^2}{4}\gamma\left(f'(b) - f'(a)\right).$$

où α, β et γ sont les poids de la formule dans le cas $a = -1$ et $b = 1$.

2. Déterminer les réels α, β et γ.
3. Montrer qu'une formule de quadrature composée associée à l'une ou l'autre des formules de quadrature corrigées ci-dessus ne nécessite d'évaluer la dérivée de la fonction f qu'aux extrémités de l'intervalle d'intégration.

Exercice 4 (méthode de la puissance avec décalage, 5 points). Soit A une matrice d'ordre n diagonalisable dont les valeurs propres λ_i, $i = 1, \dots, n$, sont réelles et distinctes, numérotées de manière à avoir

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

Une variante de la méthode de la puissance consiste à appliquer cette dernière à la matrice $A - \mu I_n$, avec μ un réel, dont le spectre est constitué des valeurs propres de A décalées du facteur $-\mu$. On parle alors de *méthode de la puissance avec décalage*. On cherche ici à utiliser cette technique pour accélérer la convergence de la méthode de la puissance en choisissant judicieusement la valeur du paramètre μ.

1. Rappeler la quantité dont dépend la vitesse de convergence de la méthode de la puissance.

On fixe la valeur du paramètre μ.

2. En étudiant les valeurs propres de la matrice $A - \mu I_n$, déterminer quelle(s) valeur(s) propre(s) de la matrice A peu(ven)t être approchée(s) en utilisant la méthode de la puissance avec décalage.

On suppose à présent que le paramètre μ est choisi de façon à ce que $\lambda_n - \mu$ soit la plus grande valeur propre en valeur absolue de la matrice $A - \mu I_n$.

3. Montrer que la deuxième plus grande valeur propre en valeur absolue est donnée soit par $\lambda_{n-1} - \mu$, soit par $\lambda_1 - \mu$.
   Indication : on pourra considérer la position du réel μ par rapport au milieu de l'intervalle $]\lambda_1, \lambda_{n-1}[$, en faisant par exemple un dessin.
4. En déduire que la méthode de la puissance avec décalage permet dans ce cas d'approcher λ_n et qu'elle converge le plus rapidement possible pour le choix
   $$\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_{n-1}}{2}.$$

Exercice 5 (calcul des différences divisées pour la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange, 4 points). Soit n un entier naturel non nul. Étant donné $n+1$ nœuds d'interpolation $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts et $n+1$ valeurs $y_0, \dots, y_n$, les différences divisées associées peuvent être calculées de la manière suivante :

$$[x_i]\mathbf{y} = y_i,\ i = 0, \dots, n,$$
$$[x_{i-k}, \dots, x_i]\mathbf{y} = \frac{[x_{i-k+1}, \dots, x_i]\mathbf{y} - [x_{i-k}, \dots, x_{i-1}]\mathbf{y}}{x_i - x_{i-k}},\ i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, i.$$

1. Rappeler quelles sont les différences divisées intervenant dans la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.
2. Écrire une fonction `newton_lagrange_coefficients`, ayant pour arguments d'entrée des tableaux contenant les nœuds et valeurs d'interpolation et renvoyant un tableau contenant les coefficients de la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant, calculés et stockés en exploitant pleinement le procédé de calcul récursif donné ci-dessus.