Partiel du 31 octobre 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2h

Exercice 1 (3 points). Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle égale à n. On suppose que u possède une unique valeur propre λ.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de u.
3. Justifier que l'endomorphisme $u - \lambda\, id_E$ est nilpotent.

Exercice 2 (produit de Kronecker, 5 points). Soit n un entier naturel non nul. Pour toutes matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$, on définit le produit de Kronecker de A et B comme la matrice $A \otimes B$ de $M_{n^2}(\mathbb{C})$ telle que

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que, si P, P', Q et Q' sont des matrices de $M_n(\mathbb{C})$, on a
$$(P \otimes Q)(P' \otimes Q') = (PP') \otimes (QQ').$$
2. En déduire que la matrice $P \otimes Q$ est inversible si et seulement si les matrices P et Q sont inversibles. Exprimer l'inverse de cette matrice en fonction des inverses des matrices P et Q.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$.

3. Justifier qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que les matrices $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ soient triangulaires supérieures. On note $\lambda_1, \dots \lambda_n$ et $\nu_1, \dots, \nu_n$ les coefficients diagonaux respectifs de ces dernières matrices.
4. Calculer le produit $(P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes B)(P \otimes Q)$ et déterminer le spectre de $A \otimes B$.
5. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \otimes B$.

Exercice 3 (4 points). Soit n un entier naturel strictement supérieur à 4. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 8.$$

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ? Montrer que 2 est une valeur propre de A et déterminer son ordre de multiplicité algébrique.
2. Justifier que les sous-espaces vectoriels $\ker(A)$ et $\ker((A - 2\,I_n)^2)$ sont supplémentaires. Quelles sont leurs dimensions respectives ?
3. En déduire que A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 2\,I_4 + M & 0_{4,n-4} \\ 0_{n-4,4} & 0_{n-4} \end{pmatrix}$$
où M est une matrice de $M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = 0_4$.
4. Montrer enfin que la matrice M introduite ci-dessus est est de rang au plus égal à 2 (on pourra faire appel au théorème du rang) et en déduire qu'elle est semblable à l'une des trois matrices suivantes :
$$0_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (suite récurrente, 3 points). Déterminer le terme général de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0.$$

Exercice 5 (applications bilinéaires, 5 points). Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
$$(x,y) \mapsto x \wedge y = \left(\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right),$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.
2. Une forme bilinéaire b définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite *alternée* si
$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$
Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
3. On considère la forme bilinéaire b de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ x = (x_1, x_2),\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ b(x,P) = 3x_1 P(0) + x_2 \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$
Déterminer les noyaux à gauche et à droite de b, ainsi que la matrice de b relativement à la base $\{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.