PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & -18 & 8 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique, noté P, et factoriser son polynôme dérivé P'.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & 18 & \lambda-8 \end{vmatrix}$$

$$= +\sqrt{5} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} - 18 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda-8) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{5} + 18\lambda^2 + (\lambda-8)\lambda^3 = \underline{\lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - \sqrt{5}}$$

(on pourrait aussi reconnaître une matrice compagnon (transposée))

$$P'(\lambda) = 4\lambda^3 - 24\lambda^2 + 36\lambda = 4\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \underline{4\lambda(\lambda-3)^2}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

Les racines de P' sont 0 et 3.

On a $P(0) = -\sqrt{5}$ et $P(3) = 3^4 - 8\times 3^3 + 18 \times 3^2 - \sqrt{5} \neq 0$ (car $\sqrt{5}$ n'est pas entier).

Donc P et P' n'ont pas de racines en commun.

Donc P n'a que des <u>racines simples</u> (et est <u>scindé</u> sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss).

Donc <u>A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$</u>.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ une matrice inversible, vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = 6$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré 2.

On a $A(A^2 - 3A + 2I_5) = 0$ et comme A est inversible, on obtient $A^2 - 3A + 2I_5 = 0$.

$P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A. (de degré 2).

La matrice A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses seules valeurs propres possibles ?

$P(X) = (X-1)(X-2)$, donc est scindé à racines simples, qui est annulateur de A donc A est diagonalisable.

Si λ est valeur propre de A, elle est racine de P, donc λ vaut 1 ou 2.

Déterminer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres, et en déduire le polynôme caractéristique de A, ainsi que son polynôme minimal.

On a $\chi_A = (X-1)^\alpha (X-2)^\beta$ (car A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ avec éventuellement $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$)

$\underbrace{}_{\alpha}\underbrace{}_{\beta}$

Donc $\mathrm{Tr}(A) = \alpha + 2\beta = 6$

et $\alpha + \beta = 5$ $(A \in M_5(\mathbb{R}))$.

On en déduit que $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = 6 - 5 = 1$ et $\alpha = 4$

1 est valeur propre de multiplicité 4, 2 est valeur propre simple

Donc $\chi_A = (X-1)^4 (X-2)$. Si Q est un polynôme annulateur, alors il a au moins 1 et 2 pour racines (les valeurs propres de A). Donc c'est un multiple de P (qui est un polynôme annulateur unitaire).

Donc le polynôme minimal est $P = (X-1)(X-2)$

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec n et p dans $\mathbb{N}^*$.

Pour $A, B \in E$, on pose $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^\top B)$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur E.

Soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $\underset{\langle A,B\rangle}{\underset{\parallel}{\operatorname{Tr}(A^T B)}} = \operatorname{Tr}((A^T B)^T) = \operatorname{Tr}(B^T A) = \langle B, A\rangle$.

Donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique. Par linéarité de la trace (et de la multiplication à gauche par A^T) $\langle A, \cdot\rangle$ est linéaire. $\left(\begin{array}{l} M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ : \tilde{B} \mapsto \langle A, \tilde{B}\rangle = \operatorname{Tr}(A^T \tilde{B}) \end{array} \right)$

De même $\begin{array}{l} M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \tilde{A} \longmapsto \langle \tilde{A}, B\rangle \end{array}$ est linéaire (linéarité de la trace, de la transposée et multiplication à droite par B)

Donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ alors $\operatorname{Tr}(\underbrace{A^T A}_{\in M_p(\mathbb{R})}) = \sum_{j=1}^{p} (A^T A)_{jj} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ji}(A)_{ij}$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} (a_{ij})^2.$$

Donc $\operatorname{Tr}(A^T A) \geq 0$ et si $\operatorname{Tr}(A^T A) = 0$, alors $\forall i,j \quad a_{ij} = 0$, donc $A = 0$.

Donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive. $\boxed{\text{C'est un produit scalaire}}$

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées, et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec sa transposée $M^\top$ si et seulement si $B = 0$ et A et C commutent avec leurs transposées (penser à prendre la trace du bloc haut gauche).

$$MM^T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}.$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B + C^T C \end{pmatrix}.$$

Donc si $MM^T = M^T M$, alors $AA^T + BB^T = A^T A$.

En prenant la trace on obtient $\operatorname{Tr}(AA^T) + \operatorname{Tr}(BB^T) = \operatorname{Tr}(A^T A)$

Comme $\operatorname{Tr}(AA^T) = \operatorname{Tr}(A^T A)$, alors $\operatorname{Tr}(BB^T) = 0$ $(= \operatorname{Tr}(B^T B) = \langle B, B\rangle)$.

Donc $B = 0$. Et on obtient donc $\begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & CC^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & C^T C \end{pmatrix}$.

Donc $A^T A = AA^T$ et $C^T C = CC^T$.

Réciproquement, si $B = 0$ et $A^T A = AA^T$ et $C^T C = CC^T$, on obtient bien $MM^T = M^T M$

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Quelle est la dimension de E ? On pourra donner un isomorphisme d'un espace de matrices dans E.

L'application qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe la forme bilinéaire
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^T A y \end{array}$$
(les éléments de $\mathbb{R}^n$ étant vus comme des vecteurs colonnes) est une bijection : d'après le cours, toute forme bilinéaire b (sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, avec la base canonique) peut s'écrire de la sorte, et $A_{ij} = b(e_i, e_j)$.
C'est une application linéaire (par rapport à A), donc un isomorphisme.
Donc E et $M_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes et ont la même $\boxed{\text{dimension } n^2}$

Pour $b \in E$, on note $\Psi(b)$ l'application $(x, y) \mapsto b(y, x)$. Montrer que l'application Ψ ainsi définie est un endomorphisme de E et décrire les sous-espaces vectoriels $\ker(\Psi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\Psi + \mathrm{id}_E)$.

On a Ψ linéaire $\left(\Psi(\lambda b + \tilde{\lambda}\tilde{b})(x,y) = \lambda b(x,y) + \tilde{\lambda}\tilde{b}(x,y) = \left(\lambda \Psi(b) + \tilde{\lambda}\Psi(\tilde{b})\right)(x,y)\right)$
et si $b \in E$, $\Psi(b)$ est bilinéaire (linéaire par rapport à chacune des variables puisque b l'est)

Donc Ψ est un endomorphisme.
Soit $b \in E$.
$b \in \mathrm{Ker}(\Psi - \mathrm{id}_E) \Leftrightarrow \Psi(b) = b \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad b(y,x) = b(x,y)$.

$\mathrm{Ker}(\Psi - \mathrm{id}_E)$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.

de même $b \in \mathrm{Ker}(\Psi + \mathrm{id}_E) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad b(y,x) = -b(x,y)$.

$\mathrm{Ker}(\Psi + \mathrm{id}_E)$ —— antisymétriques.

L'endomorphisme Ψ est-il diagonalisable ?

Les espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(\Psi - \mathrm{id}_E)$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(\Psi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe. De plus toute forme bilinéaire est la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique $\left(b(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) + \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x))\right)$, donc $E = E_1 \oplus E_{-1}$.
Donc Ψ est diagonalisable (dim finie).

Problème : polynômes annulateurs de deux matrices différentes.

Soit $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec $n, p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on a Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

— Q_1 est un polynôme annulateur de A_1,
— Q_2 est un polynôme annulateur de A_2,
— Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux.

I. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $\Phi(H) = A_1H - HA_2$.

Montrer que l'application Φ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour $H \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on a bien $\Phi(H) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ et $H, \tilde{H} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on a bien

$$\Phi(\lambda H + \tilde{\lambda}\tilde{H}) = A_1(\lambda H + \tilde{\lambda}\tilde{H}) - (\lambda H + \tilde{\lambda}\tilde{H})A_2 = \lambda(A_1H - HA_2) + \tilde{\lambda}(A_1\tilde{H} - \tilde{H}A_2)$$
$$= \lambda\Phi(H) + \tilde{\lambda}\Phi(\tilde{H}).$$

Donc Φ est linéaire de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Si $H \in \ker\Phi$ et si $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $Q(A_1)H = HQ(A_2)$ (on pourra commencer avec $Q = X^k$).

$\boxed{A_1H = HA_2}$

Par récurrence sur k : On a bien $(A_1)^0 H = I_n H = H = H I_p = H(A_2)^0$.

Supposons $A_1^k H = H A_2^k$. Alors $A_1^{k+1}H = A_1^k(A_1H) = A_1^k H A_2 = H A_2^k A_2 = H A_2^{k+1}$.

Donc si $Q = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on a $Q(A_1)H = \sum_{k=0}^{m} a_k A_1^k H = \sum_{k=0}^{m} a_k H (A_2)^k = HQ(A_2)$.

On considère des polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q_1R_1 + Q_2R_2 = 1$ (de tels polynômes existent par le théorème de Bézout). En exprimant $(Q_1R_1)(A_1) + (Q_2R_2)(A_1)$, montrer que que $Q_2(A_1)$ est inversible.

On a $(Q_1R_1 + Q_2R_2)(A_1) = I_n$. Mais aussi $(Q_1R_1)(A_1) = (R_1Q_1)(A_1) = R_1(A_1)\underbrace{Q_1(A_1)}_{=0} = 0$.

Donc $\boxed{Q_2(A_1)R_2(A_1) = I_n.}$

$Q_2(A_1)$ est inversible (d'inverse $R_2(A_1)$).

Déduire des deux questions précédentes que Φ est injectif, puis montrer qu'il est bijectif.

Si $H \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors $Q_2(A_1)H = H\underbrace{Q_2(A_2)}_{=0} = 0$; et comme $Q_2(A_1)$ est inversible, alors $H = 0$. Donc $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Donc Φ est injective, et comme c'est un endomorphisme en dimension finie ($n \times p$), elle est bijective.

II. Application à l'étude d'une matrice par blocs. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ une matrice par blocs, avec $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que Q_1Q_2 est un polynôme annulateur de M.

Soit $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose $P = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$, puis calculer PMP^{-1}.

On a bien $\begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n^2 & -I_nH+HI_p \\ 0 & I_p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = I_{n+p}$.

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B+HA_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} A_1 & B+HA_2-HA_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}}$$

Déduire de la partie précédente (l'étude de Φ) que M est semblable à $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Comme Φ est bijective, il existe H tel que $\Phi(H) = B$. On prend un tel H.

Donc $B + HA_2 - HA_1 = \Phi(H) + HA_2 - A_1H = 0$.

Donc $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \widetilde{M}$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, calculer $Q(\widetilde{M})$ en fonction de $Q(A_1)$ et $Q(A_2)$ (on pourra commencer avec $Q = X^k$). En déduire que Q_1Q_2 est un polynôme annulateur de $\widetilde{M}$.

On a $\widetilde{M}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$ (par récurrence immédiate).

Donc si $Q = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ $Q(\widetilde{M}) = \sum_{k=0}^{m} a_k \widetilde{M}^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_k A_1^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{m} a_k A_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A_1) & 0 \\ 0 & Q(A_2) \end{pmatrix}$

Donc $Q_1Q_2(\widetilde{M}) = \begin{pmatrix} Q_1(A_1)Q_2(A_1) & 0 \\ 0 & Q_1(A_2)Q_2(A_2) \end{pmatrix} = 0$

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, calculer $Q(PMP^{-1})$ en fonction de $Q(M)$, puis en conclure que Q_1Q_2 est un polynôme annulateur de M.

De même on a $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ (récurrence immédiate).

puis $Q(PMP^{-1}) = PQ(M)P^{-1}$.

Donc $0 = Q_1Q_2(\widetilde{M}) = Q_1Q_2(PMP^{-1}) = PQ_1Q_2(M)P^{-1}$.

Donc $\boxed{Q_1Q_2(M) = 0}$