Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2023-2024

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Algèbre Linéaire 3.
Partiel du 31 octobre 2023 (durée 2h).

L'examen se compose de quatre exercices et d'un problème en deux parties.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficaces, et n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice : N° copie :

Commentaires éventuels :

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & -18 & 8 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique, noté P, et factoriser son polynôme dérivé P'.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ une matrice inversible, vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = 6$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré 2.

La matrice A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses seules valeurs propres possibles ?

Déterminer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres, et en déduire le polynôme caractéristique de A, ainsi que son polynôme minimal.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec n et p dans $\mathbb{N}^*$. Pour $A, B \in E$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées, et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec sa transposée $M^\top$ si et seulement si $B = 0$ et A et C commutent avec leurs transposées (penser à prendre la trace du bloc haut gauche).

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Quelle est la dimension de E ? On pourra donner un isomorphisme d'un espace de matrices dans E.

Pour $b \in E$, on note $\Psi(b)$ l'application $(x, y) \mapsto b(y, x)$. Montrer que l'application Ψ ainsi définie est un endomorphisme de E et décrire les sous-espaces vectoriels $\ker(\Psi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\Psi + \mathrm{id}_E)$.

L'endomorphisme Ψ est-il diagonalisable ?

Problème : polynômes annulateurs de deux matrices différentes.

Soit $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec $n, p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on a Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

— Q_1 est un polynôme annulateur de A_1,
— Q_2 est un polynôme annulateur de A_2,
— Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux.

I. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $\Phi(H) = A_1H - HA_2$.

Montrer que l'application Φ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $H \in \ker \Phi$ et si $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $Q(A_1)H = HQ(A_2)$ (on pourra commencer avec $Q = X^k$).

On considère des polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q_1R_1 + Q_2R_2 = 1$ (de tels polynômes existent par le théorème de Bézout). En exprimant $(Q_1R_1)(A_1) + (Q_2R_2)(A_1)$, montrer que que $Q_2(A_1)$ est inversible.

Déduire des deux questions précédentes que Φ est injectif, puis montrer qu'il est bijectif.

II. Application à l'étude d'une matrice par blocs. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ une matrice par blocs, avec $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que $Q_1 Q_2$ est un polynôme annulateur de M.

Soit $H \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose $P = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$, puis calculer PMP^{-1}.

Déduire de la partie précédente (l'étude de Φ) que M est semblable à $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, calculer $Q(\widetilde{M})$ en fonction de $Q(A_1)$ et $Q(A_2)$ (on pourra commencer avec $Q = X^k$). En déduire que $Q_1 Q_2$ est un polynôme annulateur de $\widetilde{M}$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, calculer $Q(PMP^{-1})$ en fonction de $Q(M)$, puis en conclure que $Q_1 Q_2$ est un polynôme annulateur de M.