Examen du 8 janvier 2025

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles ou que des arguments de preuve ne sont pas rigoureusement justifiés.

Durée : 3 heures

Exercice 1 (décomposition de Schur, 3 points). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que toute matrice d'ordre n réelle M dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose sous la forme

$$M = QTQ^\top,$$

où Q est une matrice orthogonale et T est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2 (2 points). Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que

$$\forall x \in E,\ \|u^*(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 3 (4 points). Soit n un entier naturel non nul, M une matrice d'ordre n réelle symétrique définie positive et N une matrice d'ordre n réelle symétrique positive.

1. Montrer que la matrice $I_n + MN$ est inversible.
2. On suppose dans cette question que la matrice N est de plus définie. Montrer que $(M+N)^{-1} \neq M^{-1} + N^{-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 4 (2 points). Déterminer la nature de l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (polynômes d'Hermite, 15 points). On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

1. (a) Établir que
   $$\forall (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$
   (b) En déduire que, pour tout couple (f,g) d'applications de E, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   (c) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(d) Montrer alors que l'application notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et définie par

$$\forall (f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

est un produit scalaire sur E.

(e) Montrer que $F\subset E$.

Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et on admet que la restriction de ce produit scalaire à F (ou à F_n) est encore un produit scalaire, que l'on continue de noter $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On note φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie par $\varphi(x)=e^{-x^2}$, et, pour tout entier naturel n, H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule de Rodrigues :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\varphi^{(n)}(x),$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n^{e} de φ. En particulier, on a : $H_0\equiv 1$.

2. (a) Donner, en faisant apparaître les calculs, les applications H_1, H_2 et H_3.

   (b) Montrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ H_{n+1}(x)=2x\,H_n(x)-H_n{}'(x).$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, H_n est une application polynomiale de degré n et déterminer le coefficient de son terme de plus haut degré.

   (d) Calculer alors H_4.

   (e) Montrer enfin que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ H_n(-x)=(-1)^n H_n(x).$$

   Que dire de la parité de l'application H_n ?

3. (a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall P\in F,\ \left\langle P',H_{n-1}\right\rangle=\langle P,H_n\rangle\,.$$

   (b) En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall P\in F_{n-1},\ \langle P,H_n\rangle=0.$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0,\dots,H_n)$ est orthogonale dans F.

   (d) Établir que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0,\dots,H_n)$ est une base de F_n.

   (e) Montrer enfin que, pour tout entier naturel n, $\|H_n\|^2=\left\langle {H_n}^{(n)},H_0\right\rangle$ et en déduire la valeur de $\|H_n\|$.

On note u, v et w les applications de F dans F respectivement définies par

$$\forall P\in F,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u(P)(x)=-P''(x)+2xP'(x)+P(x),\ v(P)(x)=2xP(x)-P'(x),\ w(P)(x)=P'(x).$$

4. Montrer que u est un endomorphisme de F.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de F.

5. (a) Établir que $v\circ w=u-id_F$ et $w\circ v=u+id_F$.

   (b) En déduire que $u\circ v-v\circ u=2v$.

6. Montrer que, pour tout réel λ et tout P de F, si $u(P)=\lambda P$, alors $u(v(P))=(\lambda+2)v(P)$.

7. (a) Calculer $u(H_0)$.

   (b) Calculer, pour tout entier naturel n, $v(H_n)$ et en déduire que $u(H_n)=(2n+1)H_n$.

8. Établir que

$$\forall (P,Q)\in F^2,\ \left\langle P',Q'\right\rangle=\langle u(P),Q\rangle-\langle P,Q\rangle\,.$$

9. Soit n un entier naturel.

   (a) Montrer que la restriction de u à F_n, notée $u_{|_{F_n}}$, est un endomorphisme de F_n.

   (b) Montrer que cet endomorphisme est auto-adjoint.

   (c) Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de $u_{|_{F_n}}$.