PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de $A + 5I_4$ et la trace de A.

$A+5I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Toutes les colonnes sont colinéaires

Donc $rg(A+5I_4) = 1$

$Tr(A) = -6$.

Justifier soigneusement que l'on peut déterminer le polynôme caractéristique de A en utilisant simplement les informations de la question précédente.

$\dim \operatorname{Ker}(A+5I_4) = 4-1 = 3$ (Th. du rang).

Donc -5 est valeur propre de χ_A de multiplicité supérieure ou égale à 3.

Donc $(X+5)^3$ divise χ_A donc $\chi_A(X) = (X+5)^3 \times (X-\lambda)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

On a $\underset{= -6}{Tr(A)} = 3\times(-5)+\lambda$ donc $\lambda = 9$ $\chi_A(X) = (X+5)^3(X-9)$.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

9 est valeur propre simple $\dim E_9 = 1$.

-5 ——— triple $\dim E_{-5} = 3$.

Donc $\dim E_9 + \dim E_{-5} = 4$, A est diagonalisable.

Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. En utilisant la matrice $B+3I_3$, montrer que B n'est pas diagonalisable.

$B+3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ donc $rg(B+3I_3) = 1$. $\boxed{\dim E_{-3} = 2}$

Comme précédemment.

$\chi_B(X) = (X+3)^2 \times (X-\lambda)$

$Tr(B) = -9 = (-3)\times 2 + \lambda$

donc $\lambda = -3$.

Donc $\chi_B(X) = (X+3)^3$.

-3 est valeur propre triple mais $\dim E_{-3} \neq 3$

Donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 2. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $\langle P,Q\rangle = \langle Q,P\rangle$ (car $\forall x \in [-1,1]$ $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$).

Par linéarité de l'intégrale on a $\int_{-1}^{1}(\lambda P_1(x)+\mu P_2(x))Q(x)dx = \lambda\int_{-1}^{1}P_1(x)Q(x)dx + \mu\int_{-1}^{1}P_2(x)Q(x)dx$

(pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$)

Donc $\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q\rangle = \lambda\langle P_1,Q\rangle + \mu\langle P_2,Q\rangle$.

Donc $\langle \cdot, Q\rangle$ est linéaire. Par symétrie $\langle Q, \cdot\rangle$ est linéaire aussi.

Donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

On a $\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1}P^2(x)dx \geq 0$. Si $\int_{-1}^{1}P^2(x)dx = 0$, par continuité de P^2 (à valeurs positives) on obtient $P(x)=0$ $\forall x\in[-1,1]$. P a une infinité de racines donc $\boxed{P=0}$

Donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ <u>est définie positive</u>

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\Phi(P) = ((1-X^2)P')'$. Montrer que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et que de plus, Φ est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Φ est linéaire (linéarité de la dérivation et de la multiplication par $(1-X^2)$).

Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ alors $P'\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(1-X^2)P'\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $\Phi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P, Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$\langle P,\Phi(Q)\rangle = \int_{-1}^{1}P(x)\left((1-x^2)Q'(x)\right)'dx = \underbrace{\left[P(x)(1-x^2)Q'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)dx$$

$$= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)Q'(x)P'(x)dx = \langle Q,\Phi(P)\rangle = \langle\Phi(P),Q\rangle.$$

<u>Donc Φ est autoadjoint.</u>

Si $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Phi(P_k) \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$, et en déduire que la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

On a $\mathrm{Vect}(P_0,\ldots P_k) = \mathrm{Vect}(1,\ldots X^k) = \mathbb{R}_k[X]$. Donc $P_k\in\mathbb{R}_k[X]$.

Donc $\Phi(P_k)\in\mathbb{R}_k[X]$ (comme précédemment).

<u>Donc $\Phi(P_k)\in\mathrm{Vect}(P_0,\ldots P_k)$.</u>

Donc la matrice A de Φ dans la base B est triangulaire supérieure.

Comme B est une base orthogonale et Φ autoadjoint, cette matrice A est aussi symétrique. Donc ~~elle est~~ si $i<j$, $a_{ij} = \underbrace{a_{ji}=0}_{\text{triang. sup.}}$

Donc <u>A est diagonale</u>

Exercice 3. Espace vectoriel engendré par les matrices spéciales orthogonales.

Soit $n \geqslant 3$. On identifie $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs colonnes, et on note $(e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont la j-ème colonne vaut e_i et les autres colonnes sont nulles. Pour $i \neq j$ on note $S_{i,j} = I_n - 2E_{i,i} - 2E_{j,j}$. Calculer l'image de la base $\mathcal{B}$ $= (e_1, \dots, e_n)$ par $S_{i,j}$, montrer que $S_{i,j} \in SO(n)$ et décrire l'isométrie vectorielle correspondante.

$$S_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $S_{ij} S_{ij}^T = S_{ij}^2 = I_n$ et $\det S_{ij} = (-1)^2 = 1$. $S_{ij} \in SO(n)$.

On a $S_{ij} e_i = -e_i$, $S_{ij} e_j = -e_j$ et $S_{ij} e_k = e_k$ pour $k \neq i, j$: Symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\{e_k,\ k \neq i, k \neq j\})$.

En déduire que $(E_{i,i} + E_{j,j}) \in \mathrm{Vect}(SO(n))$, puis en prenant $k \neq i$ et $k \neq j$ (ce qui est possible puisque $n \geqslant 3$) et en utilisant également $(E_{j,j} + E_{k,k})$ et $(E_{i,i} + E_{k,k})$, montrer que $E_{i,i} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$.

On a $E_{i,i} + E_{jj} = \dfrac{I_n - S_{ij}}{2} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$ puisque $I_n \in SO(n)$ et $S_{ij} \in SO(n)$.

Comme $E_{ii} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(E_{ii} + E_{jj})}_{\in \mathrm{Vect}(SO(n))} + \underbrace{(E_{ii} + E_{k,k})}_{\in \mathrm{Vect}(SO(n))} - \underbrace{(E_{jj} + E_{k,k})}_{\in \mathrm{Vect}(SO(n))}\Big)$, alors $E_{ij} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$.

Pour $i \neq j$ on note $R_{i,j}$ la matrice dont la i-ème colonne est e_j, la j-ème colonne est $-e_i$, et pour tout k différent de i et de j, la k-ième colonne est e_k. Quelle est l'image de la base $\mathcal{B}$ par $R_{i,j}$? Montrer que $R_{i,j} \in SO(n)$ et décrire l'isométrie vectorielle correspondante.

$R_{i,j} e_k = e_k$ si $k \neq i, j$

$R_{i,j} e_i = e_j$

$R_{i,j} e_j = -e_i$

L'image de la base B est donc une base orthonormale aussi. Donc c'est bien une isométrie vectorielle. Et en développant par rapport à toutes les colonnes sauf i et j on obtient

$$\det(R_{i,j}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

L'isométrie correspond à une rotation d'angle π/2 dans le plan $\mathrm{Vect}(\{e_i, e_j\})$

En effet la matrice de l'isométrie restreinte à ce plan, dans la base (e_i, e_j) est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculer $R_{i,j} E_{i,i}$ et en déduire que $E_{j,i} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$.

On a $R_{ij} E_{ii} e_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ R_{ij} e_i = e_j & \text{si } k = i \end{cases}$ Donc $R_{ij} E_{ij} = E_{j,i}$ (la i-ème colonne est e_j)

Comme $E_{ii} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$, on a $E_{ii} = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$ avec $\alpha_p \in \mathbb{R}$ et $A_p \in SO(n)$.

Donc $\boxed{E_{j,i} = \alpha_1 \underbrace{R_{ij} A_1}_{\in SO(n)} + \dots + \alpha_m \underbrace{R_{ij} A_m}_{\in SO(n)}} \in \mathrm{Vect}(SO(n))$ (car le produit de deux matrices de $SO(n)$ est dans $SO(n)$)

Si M commute avec toutes les matrices de $SO(n)$, montrer que M est proportionnelle à I_n (on pourra observer les lignes de $E_{i,j}M$ et les colonnes de $ME_{i,j}$). Est-ce le cas pour $n = 2$?

Comme $E_{i,j} = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ et $A_1 \dots A_m \in SO(n)$.

alors $M E_{ij} = \alpha_1 MA_1 + \dots + \alpha_m MA_m = E_{ij} M$.

les colonnes de ME_{ij} sont nulles sauf la colonne j qui vaut $Me_i = \begin{pmatrix} m_{i,1} \\ \vdots \\ m_{i,n} \end{pmatrix}$ $m_{i,j}$

les lignes de $E_{ij}M$ ——— la ligne i qui vaut $(m_{1,j} \cdots m_{n,j})$ $= m_{j,j}$

Donc $m_{i,k} = 0$ sauf pour $k=i$ et on a $m_{i,i} = m_{j,j}$.

Donc les coefficients diagonaux sont égaux et ceux hors de la diagonale sont nuls. Donc $M = \lambda I_n$.

En dimension 2, tous les éléments de $SO(2)$ commutent entre eux. Donc par exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$) commute avec tous les éléments de $SO(2)$ mais n'est pas proportionnelle à I_2.

Problème : Théorème de Perron dans le cas symétrique

I. Introduction. On s'intéresse à des matrices symétriques et à coefficients strictement positifs.

Donner un exemple (simple) en dimension 2 d'une telle matrice qui a une valeur propre $\lambda < 0$ (et n'est donc pas définie positive).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A(x) = (x-1)^2 - 4 = (x+1)(x-3)$.

valeurs propres $\lambda = -1$ et $\boxed{\rho = 3}$

Observer que cette matrice a aussi une valeur propre positive $\rho > |\lambda|$, et qu'il existe un vecteur propre associé à ρ qui a toutes ses coordonnées strictement positives.

On a bien $3 > |-1|$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur associé à ρ avec toutes ses coordonnées >0.

Le théorème de Perron généralise ceci : si A est une matrice à coefficients tous strictement positifs, il existe une valeur propre simple $\rho > 0$, et un vecteur propre $\mathbf{v}$ associé à ρ à coordonnées strictement positives. Toute autre valeur propre (éventuellement complexe) λ vérifie $|\lambda| < \rho$, et si un vecteur propre est à coordonnées positives, alors il est proportionnel à $\mathbf{v}$. C'est un théorème puissant, utilisé notamment dans le domaine des chaînes de Markov en probabilités.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème dans le cas où A est symétrique, et de l'appliquer dans un cas particulier. Dans ce problème, on identifie $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des vecteurs colonnes et on le munit du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

II. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

On note ρ sa plus grande valeur propre. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, Ax\rangle \leqslant \rho\|x\|^2$.

A est diagonalisable avec une base orthogonale de vecteurs propres $(e_1 \dots e_n)$ (pour les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n \leqslant \rho$).

On a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Alors $Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n$

et $\langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \rho x_i^2 = \rho\|x\|^2$

Si $y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, on note $|y| = (|y_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que si $y \neq 0$, alors $-\langle y, Ay\rangle < \langle |y|, A|y|\rangle$, et que s'il existe i_0, j_0 tels que $y_{i_0} > 0$ et $y_{j_0} < 0$, alors $\langle y, Ay\rangle < \langle |y|, A|y|\rangle$.

On a $\langle y, Ay\rangle = \sum_{i,j} y_i a_{i,j} y_j \leqslant \sum_{i,j} |y_i a_{i,j} y_j| = \sum_{i,j} |y_i| a_{i,j} |y_j| = \langle |y|, A|y|\rangle$.

Si $y_{i_0} y_{j_0} < 0$ alors $y_{i_0} a_{i_0 j_0} y_{j_0} < |y_{i_0}| a_{i_0 j_0} |y_{j_0}|$ et l'inégalité est stricte

On a aussi $-y_i a_{i,j} y_j \leqslant |y_i||a_{i,j}||y_j|$ et si $y_i \neq 0, -y_i a_{i,i} y_i = -y_i^2 a_{i,i} < |y_i| a_{i,i} |y_i|$

Donc en faisant la somme sur i et j on a bien l'inégalité stricte demandée : $-\langle y,Ay\rangle < \langle |y|,A|y|\rangle$ dès qu'au moins un des y_i est non nul.

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, un vecteur propre associé à ρ, tel que $v_{i_0} > 0$ pour un $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i \geqslant 0$. En écrivant $A\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$, en déduire que $\rho > 0$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i > 0$.

Si $v_{j_0} < 0$, on aurait $z = (|v_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$ aussi de norme 1. avec $\langle z, Az\rangle > \langle v, Av\rangle = \rho\|v\|^2 = \rho\|z\|^2$. Contradiction. Donc $\forall i, v_i \geqslant 0$.

Donc $\rho v_i = (Av)_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{>0} \underbrace{v_j}_{\geqslant 0} \geqslant a_{i,i_0} v_{i_0} > 0$.

Donc $\rho > 0$ et $v_i > 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

Si $\mathbf{w} = (w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un vecteur propre associé à ρ, on note $\alpha = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{w_i}{v_i}$. Montrer que $\alpha\mathbf{v} - \mathbf{w}$ a toutes ses coordonnées positives et au moins une coordonnée nulle. En déduire que l'espace propre associé à ρ est de dimension 1.

On note i_0 l'indice du maximum. $\alpha = \frac{w_{i_0}}{v_{i_0}}$ et $\frac{w_i}{v_i} \leqslant \frac{w_{i_0}}{v_{i_0}}$ ie $\frac{w_i}{v_i} \leqslant \alpha$.

Donc $(\alpha v_i - w_i) \geqslant 0$. et $(\alpha v_{i_0} - w_{i_0}) = 0$.

Comme $A(\alpha v - w) = \rho(\alpha v - w)$, si $\alpha v - w \neq 0$, alors $\tilde{v} = \frac{\alpha v - w}{\|\alpha v - w\|}$ est un vecteur propre de norme 1 avec au moins une coordonnée $\geqslant 0$, donc toutes les coordonnées sont > 0 d'après ce qui précède : contradiction.

Donc $w = \alpha v$. $\boxed{E_\rho = \mathrm{Vect}(v)}$, de dimension 1.

Si $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur propre associé à $\lambda \neq \rho$, que vaut $\langle y, \mathbf{v} \rangle$? En déduire qu'il existe i_0, j_0 tels que $y_{i_0} > 0$ et $y_{j_0} < 0$, et que $|\lambda| < \rho$.

A est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc $\langle y, v\rangle = 0$

Si $y_i \geq 0 \ \forall i$ et $y \neq 0$. alors $\langle v, y\rangle = \sum \underbrace{v_i}_{\geq 0} \underbrace{y_i}_{\geq 0} \neq 0$ donc $y_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{R}^n$.

y est un vecteur propre non nul, avec $y_{i_0} > 0$ et $y_{j_0} < 0$. Donc pour $z = (|y_i|)$,

on a $\underbrace{\langle z, Az\rangle}_{\leq \rho \|z\|^2 = \rho\|y\|^2} > |\langle y, Ay\rangle| = |\lambda| \, \|y\|^2$ donc $|\lambda| < 0$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\| \frac{1}{\rho^m} A^m x - \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{v}, x \rangle \mathbf{v} \|^2 \underset{m \to \infty}{\to} 0$.

On complète $\frac{v}{\|v\|}$ en une base ~~orthon~~ormée de vecteurs propre $(e_2 \cdots e_n)$

$$\frac{1}{\rho^m} A^m x = \frac{1}{\rho^m} A^m \left(\langle \tfrac{v}{\|v\|}, x\rangle \frac{v}{\|v\|} + \sum_{i=2}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i \right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{(\lambda_i)^m}{\rho^m} \langle e_i, x\rangle e_i + \langle v, x\rangle \frac{v}{\|v\|^2}$$

$$\left\| \frac{1}{\rho^m} A^m x - \frac{\langle v, x\rangle v}{\|v\|^2} \right\|^2 = \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\frac{(\lambda_i)^{2m}}{\rho^{2m}}}_{\to 0 \text{ car } |\lambda_i| < \rho} \langle e_i, x\rangle^2 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

III. Application à une matrice (dite « bistochastique »). Soit $A = \frac{1}{2024} \begin{pmatrix} 2003 & 11 & 10 \\ 11 & 2004 & 9 \\ 10 & 9 & 2005 \end{pmatrix}$.

Trouver (deviner...) un vecteur propre de A à coordonnées strictement positives, et déduire de la partie précédente la plus grande valeur propre de A.

On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2024} \begin{pmatrix} 2003 + 11 + 10 \\ 11 + 2004 + 9 \\ 10 + 9 + 2005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (on a bien A symétrique à coeffs ≥ 0). Donc 1 est une valeur propre pour le vecteur à coordonnées strictement positives, c'est donc que c'est la plus grande valeur propre $(\rho = 1)$ par (II.?)

Si $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sont des suites définies par récurrence par $\begin{pmatrix} \alpha_{m+1} \\ \beta_{m+1} \\ \gamma_{m+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \\ \gamma_m \end{pmatrix}$, montrer qu'elles convergent et donner leur limite en fonction de α_0, β_0 et γ_0.

On a $x_n = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \\ \gamma_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \frac{A^m x_0}{\rho^m}$ $(\rho = 1)$

On a donc $\| x_n - \langle v, x_0\rangle v \|^2 \to 0$ avec $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ $(\|v\| = 1)$

Donc $\langle v, x_0\rangle v = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\alpha_m \to \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}$, $\beta_m \to \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}$, $\gamma_m \to \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}$