Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2023-2024

NOM : ....

PRÉNOM : ....
(lisiblement)

Algèbre Linéaire 3.
Examen du 8 janvier (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices et d'un problème en trois parties.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficaces, et n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice :	N^{o} copie :
Commentaires éventuels :	

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de $A + 5I_4$ et la trace de A.

Justifier soigneusement que l'on peut déterminer le polynôme caractéristique de A en utilisant simplement les informations de la question précédente.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. En utilisant la matrice $B + 3I_3$, montrer que B n'est pas diagonalisable.

Exercice 2. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\Phi(P) = ((1-X^2)P')'$. Montrer que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et que de plus, Φ est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Si $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Phi(P_k) \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$, et en déduire que la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Exercice 3. Espace vectoriel engendré par les matrices spéciales orthogonales.

Soit $n \geqslant 3$. On identifie $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs colonnes, et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont la j-ème colonne vaut e_i et les autres colonnes sont nulles. Pour $i \neq j$ on note $S_{i,j} = I_n - 2E_{i,i} - 2E_{j,j}$. Calculer l'image de la base $\mathcal{B}$ par $S_{i,j}$, montrer que $S_{i,j} \in SO(n)$ et décrire l'isométrie vectorielle correspondante.

En déduire que $(E_{i,i} + E_{j,j}) \in \text{Vect}(SO(n))$, puis en prenant $k \neq i$ et $k \neq j$ (ce qui est possible puisque $n \geqslant 3$) et en utilisant également $(E_{j,j} + E_{k,k})$ et $(E_{i,i} + E_{k,k})$, montrer que $E_{i,i} \in \text{Vect}(SO(n))$.

Pour $i \neq j$ on note $R_{i,j}$ la matrice dont la i-ème colonne est e_j, la j-ème colonne est $-e_i$, et pour tout k différent de i et de j, la k-ième colonne est e_k. Quelle est l'image de la base $\mathcal{B}$ par $R_{i,j}$? Montrer que $R_{i,j} \in SO(n)$ et décrire l'isométrie vectorielle correspondante.

Calculer $R_{i,j}E_{i,i}$ et en déduire que $E_{i,j} \in \text{Vect}(SO(n))$.

Si M commute avec toutes les matrices de $SO(n)$, montrer que M est proportionnelle à I_n (on pourra observer les lignes de $E_{i,j}M$ et les colonnes de $ME_{i,j}$). Est-ce le cas pour $n = 2$?

Problème : Théorème de Perron dans le cas symétrique

I. Introduction. On s'intéresse à des matrices symétriques et à coefficients strictement positifs.

Donner un exemple (simple) en dimension 2 d'une telle matrice qui a une valeur propre $\lambda < 0$ (et n'est donc pas définie positive).

Observer que cette matrice a aussi une valeur propre positive $\rho > |\lambda|$, et qu'il existe un vecteur propre associé à ρ qui a toutes ses coordonnées strictement positives.

Le théorème de Perron généralise ceci : si A est une matrice à coefficients tous strictement positifs, il existe une valeur propre simple $\rho > 0$, et un vecteur propre $\mathbf{v}$ associé à ρ à coordonnées strictement positives. Toute autre valeur propre (éventuellement complexe) λ vérifie $|\lambda| < \rho$, et si un vecteur propre est à coordonnées positives, alors il est proportionnel à $\mathbf{v}$. C'est un théorème puissant, utilisé notamment dans le domaine des chaînes de Markov en probabilités.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème dans le cas où A est symétrique, et de l'appliquer dans un cas particulier. Dans ce problème, on identifie $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des vecteurs colonnes et on le munit du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

II. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

On note ρ sa plus grande valeur propre. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, Ax \rangle \leqslant \rho \|x\|^2$.

Si $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, on note $|y| = (|y_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que si $y \neq 0$, alors $-\langle y, Ay \rangle < \langle |y|, A|y| \rangle$, et que s'il existe i_0, j_0 tels que $y_{i_0} > 0$ et $y_{j_0} < 0$, alors $\langle y, Ay \rangle < \langle |y|, A|y| \rangle$.

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, un vecteur propre associé à ρ, tel que $v_{i_0} > 0$ pour un $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i \geqslant 0$. En écrivant $A\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$, en déduire que $\rho > 0$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i > 0$.

Si $\mathbf{w} = (w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur propre associé à ρ, on note $\alpha = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \frac{w_i}{v_i}$. Montrer que $\alpha\mathbf{v} - \mathbf{w}$ a toutes ses coordonnées positives et au moins une coordonnée nulle. En déduire que l'espace propre associé à ρ est de dimension 1.

Si $y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un vecteur propre associé à $\lambda \neq \rho$, que vaut $\langle y, \mathbf{v}\rangle$? En déduire qu'il existe i_0, j_0 tels que $y_{i_0} > 0$ et $y_{j_0} < 0$, et que $|\lambda| < \rho$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|\frac{1}{\rho^m}A^m x - \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\langle \mathbf{v}, x\rangle \mathbf{v}\|^2 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

III. Application à une matrice (dite « bistochastique »). Soit $A = \dfrac{1}{2024}\begin{pmatrix} 2003 & 11 & 10 \\ 11 & 2004 & 9 \\ 10 & 9 & 2005 \end{pmatrix}$.

Trouver (deviner…) un vecteur propre de A à coordonnées strictement positives, et déduire de la partie précédente la plus grande valeur propre de A.

Si $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont des suites définies par récurrence par $\begin{pmatrix}\alpha_{m+1}\\ \beta_{m+1}\\ \gamma_{m+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_m\\ \beta_m\\ \gamma_m\end{pmatrix}$, montrer qu'elles convergent et donner leur limite en fonction de α_0, β_0 et γ_0.

Espace éventuel pour dépassement de cases.