Corrigé (succinct) du contrôle continu du 2 décembre 2024

Exercice 1.

1. Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice réelle symétrique définie positive sont non nuls.

Soit n un entier naturel non nul et M une matrice réelle symétrique définie positive d'ordre n. Par définition, on a

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})},\ X^\top MX > 0.$$

Il suffit alors de remarquer que, pour tout entier i de $\{1,\dots,n\}$, le choix $X = E_i$, où E_i est le i^e vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, conduit à $X^\top MX = m_{ii}$.

2. En utilisant le cours, justifier une condition nécessaire et suffisante permettant de vérifier explicitement qu'une matrice réelle symétrique est définie négative.

L'opposée d'une matrice réelle symétrique est définie négative étant réelle symétrique est définie positive, il suffit d'appliquer le critère de Sylvester à l'opposée de la matrice considérée. Ainsi, pour une matrice réelle symétrique M d'ordre n, avec n un entier naturel non nul, la condition nécessaire et suffisante sera

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \det(M_k)\begin{cases} < 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ > 0 & \text{si } k \text{ est pair}\end{cases}$$

où

$$M_k = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk}\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Donner, en justifiant la réponse, la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2.$$

En effectuant une réduction de Gauss de q, on trouve

$$q(x) = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2-x_3)^2,$$

d'où $\operatorname{sign}(q) = (2,0)$.

2. Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 75{x_4}^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 30x_1x_4 - 6x_2x_3 + 30x_2x_4 - 28x_3x_4.$$

Donner, en justifiant les réponses, la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la signature et le rang de q, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^4$ et la matrice de q relativement à cette base.

La matrice de la forme quadratique relativement à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -15 \\ -3 & 3 & -3 & 15 \\ 3 & -3 & 3 & -14 \\ -15 & 15 & -14 & 75 \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite une réduction de Gauss de la forme quadratique. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) &= 3({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 25{x_4}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_1x_4) - 6x_2x_3 + 30x_2x_4 - 28x_3x_4 \\ &= 3(x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4)^2 + 2x_3x_4 \\ &= 3(x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_3+x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_3-x_4)^2.\end{aligned}$$

La signature de q est donc $(2,1)$ et le rang de q vaut 3. En complétant la famille des formes linéaires linéairement indépendantes $\ell_1(x)=x_1-x_2+x_3-5x_4$, $\ell_2(x)=x_3+x_4$ et $\ell_3(x)=x_3-x_4$ par la forme linéaire $\ell_4(x)=x_2$ pour obtenir une base du dual de $\mathbb{R}^4$, on trouve que la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base q-orthogonale est donnée par

$$P=\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&1\\1&1&1&0\\-5&1&-1&0\end{pmatrix}^{\top}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\0&0&0&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^4$ est donc $\left\{(1,0,0,0),(2,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-3,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(1,1,0,0)\right\}$ et la matrice de q relativement à cette base est

$$\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien et $B=\{x\in E\,|\,\|x\|\leq 1\}$. Montrer que B est un ensemble strictement convexe, c'est-à-dire que

$$\forall (x,y)\in B^2,\ x\neq y,\ \forall t\in]0,1[,\ \|(1-t)x+ty\|<1.$$

En utilisant la définition de B et les propriétés d'absolue homogénéité et d'inégalité triangulaire vérifiées par la norme sur E, on a que

$$\forall (x,y)\in B^2,\ \forall t\in]0,1[,\ \|(1-t)x+ty\|\leq \|(1-t)x\|+\|ty\|=(1-t)\|x\|+t\|y\|\leq (1-t)+t=1.$$

Pour avoir égalité dans les deux inégalités, il faut et il suffit que les vecteurs $(1-t)x$ et ty soient positivement liés d'une part et que $\|x\|=\|y\|=1$ d'autre part, ce qui implique que $x=y$. L'inégalité ci-dessus est donc stricte si $x\neq y$.

Exercice 4.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2\leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\right).$$

En utilisant la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, il vient alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{4}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}\leq\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},$$

ce qui permet de conclure.

2. Soit $[a,b]$ un intervalle borné non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\forall t\in[a,b],\ (f(t))^2\leq (t-a)\int_a^t (f'(s))^2\,\mathrm{d}s.$$

En déduire que

$$\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(s))^2\,\mathrm{d}s.$$

Compte tenu des hypothèse sur la fonction f, on a, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall t\in[a,b],\ f(t)=\int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puisque f' est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, en utilisant pour tout réel t de $[a,b]$ l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour le produit scalaire sur l'espace $\mathscr{C}^0([a,t],\mathbb{R})$ défini par $\langle h,g\rangle=\int_a^t g(s)h(s)\,\mathrm{d}s$, on trouve

$$\forall t\in[a,b],\ (f(t))^2=\left(\int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\leq\left(\int_a^t \mathrm{d}s\right)\left(\int_a^t (f'(s))^2\,\mathrm{d}s\right)=(t-a)\left(\int_a^t (f'(s))^2\,\mathrm{d}s\right).$$

La fonction $(f')^2$ étant positive, on a alors la majoration

$$\forall t \in [a,b], \int_a^t (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s \leq \int_a^b (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s,$$

et donc, par intégration sur l'intervalle $[a,b]$,

$$\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b (t-a) \, \mathrm{d}t \right) \int_a^b (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s.$$

Exercice 5. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit A le sous-espace vectoriel défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Déterminer une base orthonormale de A.
On a

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = -x_3 - x_4 \text{ et } x_2 = -x_4 \right\}$$

d'où la famille libre formée des vecteurs $e_1 = (-1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (-1, -1, 0, 1)$ est une base de A. Elle n'est cependant pas orthonormale et on lui applique par conséquent la procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. On trouve

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0),$$

$$\tilde{f}_2 = e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1 = (-1, -1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1 \right), \; f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \left(-\tfrac{1}{2}, -1, -\tfrac{1}{2}, 1 \right).$$

La famille $\{f_1, f_2\}$ est une base orthonormale de A.