Contrôle continu du 2 décembre 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 1h

Exercice 1 (3 points).

1. Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice réelle symétrique définie positive sont non nuls.
2. En utilisant le cours, justifier une condition nécessaire et suffisante permettant de vérifier explicitement qu'une matrice réelle symétrique est définie négative.

Exercice 2 (6 points).

1. Donner, en justifiant la réponse, la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$$

2. Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 75{x_4}^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 30x_1x_4 - 6x_2x_3 + 30x_2x_4 - 28x_3x_4.$$

   Donner, en justifiant les réponses, la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la signature et le rang de q, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^4$ et la matrice de q relativement à cette base.

Exercice 3 (4 points). Soit E un espace préhilbertien et $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Montrer que B est un ensemble strictement convexe, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in B^2,\ x \neq y,\ \forall t \in]0,1[,\ \|(1-t)x + ty\| < 1.$$

Exercice 4 (4 points).

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2.$$

2. Soit $[a, b]$ un intervalle borné non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\forall t \in [a, b],\ (f(t))^2 \leq (t-a) \int_a^t (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s.$$

   En déduire que

$$\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(s))^2 \, \mathrm{d}s.$$

Exercice 5 (3 points). On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit A le sous-espace vectoriel défini par

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Déterminer une base orthonormale de A.