Corrigé (succinct) du contrôle continu du 2 octobre 2024

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n et u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $u^2 = \lambda u$.

Le rang de u étant égal à 1, il découle du théorème du rang que le noyau de u est un hyperplan et il existe un vecteur non nul x de E tel que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$. Puisque $u(x)$ appartient à E, on peut écrire

$$u(x) = y + \lambda x,$$

avec y un vecteur de $\ker(u)$ et λ un scalaire, et alors

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(y + \lambda x) = u(y) + \lambda u(x) = \lambda u(x).$$

Il en résulte que les applications linéaires u^2 et λu coïncident sur $\mathrm{Vect}(\{x\})$, mais aussi trivialement sur $\ker(u)$ et donc sur E.

2. Vérifier que λ est une valeur propre de u.

Pour tout vecteur y appartenant à $\mathrm{Im}(u) \setminus \{0_E\}$, il existe un vecteur z de E tel que $u(z) = y$. Il vient alors $u(y) = u^2(z) = \lambda u(z) = \lambda y$ et le scalaire λ est donc une valeur propre de u associée à y.

Exercice 2. Soit E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et f l'endomorphisme de E qui a une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ v_k = u_{k+1} - u_k.$$

Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. On a

$$f(u) = \lambda u \iff \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k = \lambda u_k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = (\lambda+1)u_k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = u_0(\lambda+1)^k.$$

La suite u est un élément de E si et seulement si $u_0 = 0$ (c'est alors la suite nulle et donc pas un vecteur propre) ou $|\lambda + 1| < 1$ (ce qui signifie que λ appartient à $]-2,0[$). Ainsi, les valeurs propres de f sont les réels λ de l'intervalle $]-2,0[$, de sous-espace propre associé $\mathrm{Vect}(\{((\lambda+1)^k)_{k\in\mathbb{N}}\})$.

Exercice 3. Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on a $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$. On détermine le sous-espace propre associé à -1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \iff 2x_1 = 2x_2 = x_3,$$

d'où $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$. On détermine ensuite le sous espace vectoriel associé à 1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_1 \iff x_1 = -x_3 \text{ et } x_2 = 0,$$

d'où $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ et la matrice A n'est donc pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique étant scindé, elle est trigonalisable. On complète la famille libre formée par les deux vecteurs obtenus en une base, par exemple avec le vecteur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$. On a alors

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on a $\chi_B(X) = (X+1)(X-1)^2$. On détermine le sous-espace propre associé à -1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_{-1} \iff x_1 = -x_3 \text{ et } x_2 = 0,$$

d'où $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. On détermine ensuite le sous espace vectoriel associé à 1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_1 \iff x_1 = x_3,$$

d'où $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$ et la matrice B est donc diagonalisable. On a $B = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0.$$

1. Montrer que l'espace $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

L'image d'un endomorphisme est toujours stable par cet endomorphisme, puisque

$$\forall x \in \mathrm{Im}(u),\ u(x) \in \mathrm{Im}(u).$$

Soit $u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

2. Montrer que ${u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}}^2 = -id_{\mathrm{Im}(u)}$.

Pour tout vecteur x de $\mathrm{Im}(u)$, il existe un vecteur z de E tel que $u(z) = x$. On a alors, en utilisant la relation satisfaite par u,

$$\forall x \in \mathrm{Im}(u),\ {u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}}^2(x) = u^3(z) = -u(z) = -x.$$

3. En déduire, par des calculs de déterminants, que la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ est paire.

On a d'une part $\det({u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}}^2) = (\det(u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}))^2$, et d'autre part $\det({u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}}^2) = \det(-id_{\mathrm{Im}(u)}) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}(u))}$, d'où $(-1)^{\dim(\mathrm{Im}(u))} \geq 0$, ce qui implique que $\dim(\mathrm{Im}(u))$ est un entier naturel pair.

4. Retrouver ce dernier résultat en étudiant la diagonalisabilité, éventuellement dans le corps $\mathbb{C}$, de la matrice représentant u dans une base de E.

Le polynôme $X^3 + X = X(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$ est annulateur de u et scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. L'endomorphisme u est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et la matrice M qui le représente dans une base de E est semblable à une matrice dont le rang est égal à la somme des ordres de multiplicité (éventuellement nuls) des valeurs propres non nulles possibles i et $-$i. Puisque la matrice M est réelle, les ordres de multiplicité de i et $-$i sont nécessairement égaux et le rang de u est donc un entier naturel pair.

Exercice 5. Déterminer un polynôme annulateur de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

En déduire une expression de M^{-1} en fonction de M et I_2 lorsque M est inversible.
D'après le théorème de Cayley–Hamilton, le polynôme caractéristique de M, $\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$, est annulateur de M. On en déduit que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et on a alors

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0_{M_2(\mathbb{K})} \iff M - (a+d)I_2 + (ad-bc)M^{-1} = 0_{M_2(\mathbb{K})} \iff M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - M).$$