Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2024/2025

Contrôle continu du 2 octobre 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 1h

Exercice 1 (3 points). Soit n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n et u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Vérifier que λ est une valeur propre de u.

Exercice 2 (4 points). Soit E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et f l'endomorphisme de E qui a une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ v_k = u_{k+1} - u_k.$$

Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

Exercice 3 (6 points). Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (5 points). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0.$$

1. Montrer que l'espace $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.

Soit $u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

2. Montrer que ${u_{|_{\mathrm{Im}(u)}}}^2 = -id_{\mathrm{Im}(u)}$.
3. En déduire, par des calculs de déterminants, que la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ est paire.
4. Retrouver ce dernier résultat en étudiant la diagonalisabilité, éventuellement dans le corps $\mathbb{C}$, de la matrice représentant u dans une base de E.

Exercice 5 (2 points). Déterminer un polynôme annulateur de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

En déduire une expression de M^{-1} en fonction de M et I_2 lorsque M est inversible.