NOM :
PRÉNOM :
(lisiblement, en majuscules)

Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2023-2024

Algèbre linéaire 3. Contrôle continu du 27 novembre 2023 (durée 1h).

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, soyez efficaces (utilisez le brouillon) et n'utilisez la dernière page blanche qu'en cas d'extrême nécessité. Le soin et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible du NOM et PRÉNOM) seront pris en compte dans la notation.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice : N° copie :

Commentaires éventuels :

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$, que l'on munit du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

On a $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx = 1$ donc 1 (le polynôme constant) est un vecteur unitaire de E

On pose $\boxed{e_1 = 1.}$

$\langle X, e_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ et $\|X\|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cancel{xxx}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$.

On pose donc $\boxed{e_2 = \frac{X - \langle X, e_1\rangle e_1}{\|X - \langle X, e_1\rangle e_1\|} = \frac{X}{\|X\|} = \sqrt{3}X}$

Puis $\langle X^2, e_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$ et $\langle X^2, e_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$.

Donc $X^2 - \langle X^2, e_1\rangle e_1 - \langle X^2, e_2\rangle e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

$\|X^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$

On pose donc $\boxed{e_3 = \sqrt{\frac{45}{4}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)}$ et (e_1, e_2, e_3) est une b.o.n.

Montrer que la projection orthogonale de X^4 sur $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ est de la forme $aX^2 + b$, (avec a, b des réels que l'on ne demande pas de calculer).

On pose $A = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ $(= \mathbb{R}^2[X])$. $P_A(X^4) = \langle e_1, X^4\rangle e_1 + \langle e_2, X^4\rangle e_2 + \langle e_3, X^4\rangle e_3$.

Comme $\langle e_2, X^4\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^5 dx = 0$, $P_A(X^4)$ est donc combinaison linéaire de e_1 $(=1)$ et de e_3 $\left(= \frac{\sqrt{45}}{2}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$, donc de la forme demandée.

En déduire que $\int_{-1}^{1}(x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2 \mathrm{d}x$ est minimale pour un unique choix de α, β, γ, que l'on exprimera en fonction de a et b.

$\int_{-1}^{1}(x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2 = 2\|X^4 - \alpha X^2 - \beta X - \gamma\|^2$. On sait que $\|X^4 - Q\|$ pour $Q \in \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ est minimal lorsque $Q = P_A(X^4)$, et c'est le seul polynôme pour lequel cette quantité est minimale (caractérisation de la projection orthogonale).

Donc $\|X^4 - \alpha X^2 - \beta X - \gamma\|$ est minimal uniquement lorsque $\alpha X^2 + \beta X + \gamma = P_A(X^4) = aX^2 + b$.
(et donc aussi $\int_{-1}^{1}(x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2 dx$). ie. pour $\boxed{\alpha = a, \beta = 0, \gamma = b}$

Exercice 2. Soit $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} \cancel{1}2 & \cancel{2}4 & 0 & 0 \\ \cancel{2}4 & \cancel{4}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$, représentant un endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Calculer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

Les deux premières colonnes sont colinéaires à $\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, les deux autres à $\boxed{U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Donc $\underline{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2)}$ (de dimension 2 U_1 et U_2 n'étant pas colinéaires)

On voit immédiatement que $\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ sont dans $\mathrm{Ker}\, u$.

Comme $\dim \mathrm{Ker}\, u = 2$ par le théorème du rang,

On a $\underline{\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)}$.

Calculer A^2 et montrer que u est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(u)$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$).

$$A^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 2^2+4\times4 & 2\times4+4\times8 & 0 & 0 \\ 2\times4+4\times8 & 4^2+8^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2+(-5)^2 & -2\times5^2 \\ 0 & 0 & -2\times5^2 & (-5)^2+5^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 40 & 0 & 0 \\ 40 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ 0 & 0 & -50 & 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Donc u est un projecteur. Comme $U_1 \perp V_1$, $U_1 \perp V_2$, $U_2 \perp V_1$, $U_2 \perp V_2$, on a que $\forall x \in \mathrm{Im}\, u$, $\forall y \in \mathrm{Ker}\, u$, $x \perp y$. Donc $\mathrm{Im}\, u \subset (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ et comme $\mathrm{Im}\, u$ et $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ sont de même dimension (2), on a

$\mathrm{Im}\, u = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ donc u est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(u)$

Calculer la distance du point $(4, 3, 2, 0)$ à $\mathrm{Im}(u)$.

Si $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ la distance de x à $\mathrm{Im}(u)$ est $\inf\limits_{y \in \mathrm{Im}(u)} \|x - y\| = \|x - P_{\mathrm{Im}(u)}(x)\|$
$= \|x - u(x)\|$

On a $x - u(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\|x - u(x)\|} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{7}.}$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$.

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par linéarité de la trace, de la transposition, de la multiplication (à gauche ou à droite) par une matrice (ou un scalaire), $\underline{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ est bilinéaire}}$

Comme $\mathrm{Tr}(A^T B) = \mathrm{Tr}\left((A^T B)^T\right) = \mathrm{Tr}(B^T A)$, on obtient que $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A) + \mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Tr}(A) = \langle B,A\rangle$.

Donc $\underline{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ est symétrique}}$.

Enfin On a $\mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{j=1}^{n} (A^T A)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ji}(A)_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ $\left(\text{si } A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$

Donc $\langle A,A\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + \mathrm{Tr}(A)^2 > 0$ dès qu'au moins un des coefficients de A est non-nul.

Donc $\underline{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ est définie positive}}$.

On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $S \in \mathcal{S}_n$, et $A \in \mathcal{A}_n$, montrer que $\langle A, S\rangle = 0$.

Si $A \in \mathcal{A}_n$, tous ses coefficients diagonaux sont nuls (car $a_{ii} = -a_{ii}$).

Donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Donc $\langle A,S\rangle = \mathrm{Tr}(A^T S) + 0 \times \mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(SA) = -\mathrm{Tr}(S^T A) \; (+\underbrace{\mathrm{Tr}(A)\times\mathrm{Tr}(S)}_{=0}) = -\langle S,A\rangle$

Donc $\underbrace{\langle A,S\rangle + \langle S,A\rangle}_{=2\langle A,S\rangle} = 0$ Donc $\underline{\langle A,S\rangle = 0}$

En déduire l'orthogonal de $\mathcal{S}_n$ pour ce produit scalaire.

On a donc d'après ce qui précède $\mathcal{A}_n \subset (\mathcal{S}_n)^\perp$.

D'autre part comme toute matrice M s'écrit de manière unique sous la forme $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n$ $\left(= \frac{M+M^T}{2}\right)$ et $A \in \mathcal{A}_n$ $\left(= \frac{M-M^T}{2}\right)$, on a $\dim \mathcal{A}_n + \dim \mathcal{S}_n = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

donc $\dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dim \mathcal{S}_n = \dim(\mathcal{S}_n)^\perp$. Donc $\boxed{\mathcal{S}_n^\perp = \mathcal{A}_n}$

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner l'expression $p_{\mathcal{S}_n}(M)$ de la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n$.

On a $M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp}$

Donc $\boxed{p_{\mathcal{S}_n}(M) = \frac{M+M^T}{2}}$