NOM :

PRÉNOM :

(lisiblement, en majuscules)

Dauphine | PSL UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2023-2024

Algèbre linéaire 3. Contrôle continu du 27 novembre 2023 (durée 1h).

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, soyez efficaces (utilisez le brouillon) et n'utilisez la dernière page blanche qu'en cas d'extrême nécessité. Le soin et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible du NOM et PRÉNOM) seront pris en compte dans la notation.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice : N° copie :

Commentaires éventuels :

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$, que l'on munit du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

Montrer que la projection orthogonale de X^4 sur $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ est de la forme $aX^2 + b$, (avec a, b des réels que l'on ne demande pas de calculer).

En déduire que $\int_{-1}^{1}(x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2\mathrm{d}x$ est minimale pour un unique choix de α, β, γ, que l'on exprimera en fonction de a et b.

Exercice 2. Soit $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$, représentant un endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Calculer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

Calculer A^2 et montrer que u est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(u)$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$).

Calculer la distance du point $(4, 3, 2, 0)$ à $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$.

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $S \in \mathcal{S}_n$, et $A \in \mathcal{A}_n$, montrer que $\langle A, S \rangle = 0$.

En déduire l'orthogonal de $\mathcal{S}_n$ pour ce produit scalaire.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner l'expression $p_{\mathcal{S}_n}(M)$ de la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n$.