Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2023-2024

Algèbre linéaire 3. Contrôle continu du 10 octobre 2023 (durée 1h).

NOM : MAJUSCULE
PRÉNOM : LISIBLE
N° TD : 0
(lisiblement, en majuscules)

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, soyez efficaces (utilisez le brouillon) et n'utilisez la dernière page blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

SUIVRE LES CONSIGNES !

On note Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ donnée par $\Phi(P)(X) = P(X+1) + P(X-1)$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que les sous-espaces vectoriels F_{pair} et F_{impair} constitués des polynômes pairs / impairs sont des sous-espaces stables par Φ.

Linéarité : Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda P + \mu Q)(X) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) = \lambda(P(X+1) + P(X-1)) + \mu(Q(X+1) + Q(X-1))$$
$$= \lambda \Phi(P)(X) + \mu \Phi(Q)(X).$$

Stabilité : Si P est pair, alors $\Phi(P)(-X) = P(-X+1) + P(-X-1)$
$$= P(X-1) + P(X+1) = \Phi(P)(X).$$

Donc $\Phi(F_{\text{pair}}) \subset F_{\text{pair}}$.

De même si P impair $\Phi(P)(-X) = P(-X+1) + P(-X-1) = -P(X-1) - P(X+1) = -\Phi(P)(X)$.
Donc $\Phi(F_{\text{impair}}) \subset F_{\text{impair}}$.

Calculer $\Phi(1)$ et $\Phi(X^2)$, puis $\Phi(X)$ et $\Phi(X^3)$.

$\Phi(1) = 1 + 1$

$$\Phi(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2$$
$$= 2X^2 + 2$$

$\Phi(X) = X+1 + X-1 = 2X$

$$\Phi(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3$$
$$= 2X^3 + 6X.$$

En déduire que $\Phi|_{\mathbb{R}_3[X]}$ est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base $(1, X^2, X, X^3)$.

On a $\Phi(1)$, $\Phi(X^2)$, $\Phi(X)$ et $\Phi(X^3)$ qui sont des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Par linéarité, on a donc
$$\Phi(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$$

Matrice dans la base $(1, X^2, X, X^3)$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \Phi(1) & \Phi(X^2) & \Phi(X) & \Phi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X^2 \\ X \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

Cet endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ est-il diagonalisable ? NON. S'il l'était, comme il a une seule valeur propre (2), il serait semblable à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, donc égal à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, ce qui n'est pas le cas.

en effet : matrice triangulaire supérieure (valeurs propres sur la diagonale).

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses sous-espaces propres.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ $\quad A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de rang 2) $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

(donc E_1 de dimension 1)

$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ $\quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (de rang 2) $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(donc E_2 de dimension 1)

Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

$Aw = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2w + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Donc $Aw - 2w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$ $(\in E_2)$.

Dans la base $\underset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (u, v, w) la matrice correspondant à A s'écrit

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} Au & Av & Aw \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array} = B.$$

Donc $\boxed{A \text{ est semblable à } B}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est son polynôme caractéristique χ_A ?

On reconnait une matrice compagnon. $\boxed{\chi_A(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 2X + 1}$

Donner les valeurs de $\chi_A(-1)$, $\chi_A(0)$ et $\chi_A(1)$, ainsi que les limites de $\chi_A(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$.

$\chi_A(-1) = 1 + 1 - 4 - 2 + 1 = -3 < 0$

$\chi_A(0) = 1 > 0$

$\chi_A(1) = 1 - 1 - 4 + 2 + 1 = -1 < 0$

D'autre part $\chi_A(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Par le ~~T~~ théorème des valeurs intermédiaires χ_A change 4 fois de signe donc admet 4 racines réelles distinctes. Il est donc scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Donc A est diagonalisable.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on définit la matrice par blocs $B_{[A]} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

Montrer que si $A, \widetilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ et $B, \widetilde{B} \in M_2(\mathbb{R})$, alors $B_{[A]} \times \widetilde{B}_{[\widetilde{A}]} = (B\widetilde{B})_{[A\widetilde{A}]}$.

Si $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\gamma} & \widetilde{\delta} \end{pmatrix}$, alors $B_{[A]} \times \widetilde{B}_{[\widetilde{A}]} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}\widetilde{A} & \widetilde{\beta}\widetilde{A} \\ \widetilde{\gamma}\widetilde{A} & \widetilde{\delta}\widetilde{A} \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{(calcul par blocs)}}{=} \begin{pmatrix} (\alpha\widetilde{\alpha} + \beta\widetilde{\gamma})A\widetilde{A} & (\alpha\widetilde{\beta} + \beta\widetilde{\delta})A\widetilde{A} \\ (\gamma\widetilde{\alpha} + \delta\widetilde{\gamma})A\widetilde{A} & (\gamma\widetilde{\beta} + \delta\widetilde{\delta})A\widetilde{A} \end{pmatrix}.$$

Comme $B\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \alpha\widetilde{\alpha} + \beta\widetilde{\gamma} & \alpha\widetilde{\beta} + \beta\widetilde{\delta} \\ \gamma\widetilde{\alpha} + \delta\widetilde{\gamma} & \gamma\widetilde{\beta} + \delta\widetilde{\delta} \end{pmatrix}$, on obtient bien $B\widetilde{B}_{[A\widetilde{A}]}$.

En déduire que si $B \in M_2(\mathbb{R})$ est semblable à $\widetilde{B} \in M_2(\mathbb{R})$, et si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à $\widetilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ alors les matrices par blocs $B_{[A]}$ et $\widetilde{B}_{[\widetilde{A}]}$ sont aussi semblables.

Indication : si $P \in M_2(\mathbb{R})$ et $Q \in M_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, considérer $P_{[Q]}$ et trouver son inverse.

Si $B = P\widetilde{B}P^{-1}$ et $A = Q\widetilde{A}Q^{-1}$, On a $P_{[Q]} \times P^{-1}_{[Q^{-1}]} = PP^{-1}_{[QQ^{-1}]} = I_{2\,[I_n]} = I_{2n}$.

Donc l'inverse de $P_{[Q]}$ est $P^{-1}_{[Q^{-1}]}$.

et $P_{[Q]}\widetilde{B}_{[\widetilde{A}]}P^{-1}_{[Q^{-1}]} = (P\widetilde{B})_{[Q\widetilde{A}]}P^{-1}_{[Q^{-1}]} = (P\widetilde{B}P^{-1})_{[Q\widetilde{A}Q^{-1}]} = B_{[A]}$.

Donc $\widetilde{B}_{[\widetilde{A}]}$ et $B_{[A]}$ sont semblables.

Applications : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix}$. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A. Montrer également que si A est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

Donc B est diagonalisable (2 valeurs propres), semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $M = B_{[A]}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} := \widetilde{M}$, donc $\chi_M = \chi_{\widetilde{M}}$.

$$\chi_{\widetilde{M}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & 0 \\ 0 & \lambda I_n - 2A \end{vmatrix} = \det(\lambda I_n - A)\det(\lambda I_n - 2A)$$

$$= \chi_A(\lambda) \times 2^n \det\left(\frac{\lambda}{2} I_n - A\right)$$

Donc $\boxed{\chi_M(\lambda) = 2^n \chi_A(\lambda)\chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$

Si A est diagonalisable, elle est semblable à $\widetilde{A}$ une matrice diagonale.

Donc $M = B_{[A]}$ est semblable à $D_{[\widetilde{A}]} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 2\widetilde{A} \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

Donc M est diagonalisable.