NOM :

PRÉNOM :

N° TD :

(lisiblement, en majuscules)

L2 MIDO 2023-2024

Algèbre linéaire 3. Contrôle continu du 10 octobre 2023 (durée 1h).

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, soyez efficaces (utilisez le brouillon) et n'utilisez la dernière page blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

On note Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ donnée par $\Phi(P)(X) = P(X+1) + P(X-1)$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que les sous-espaces vectoriels F_{pair} et F_{impair} constitués des polynômes pairs / impairs sont des sous-espaces stables par Φ.

Calculer $\Phi(1)$ et $\Phi(X^2)$, puis $\Phi(X)$ et $\Phi(X^3)$.

En déduire que $\Phi|_{\mathbb{R}_3[X]}$ est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base $(1, X^2, X, X^3)$.

Cet endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ est-il diagonalisable ?

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer χ_A, donner le rang de $A - I_3$ et $A - 2I_3$ et en déduire les sous-espaces propres de A.

Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est son polynôme caractéristique χ_A ?

Donner les valeurs de $\chi_A(-1)$, $\chi_A(0)$ et $\chi_A(1)$, ainsi que les limites de $\chi_A(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on définit la matrice par blocs $B_{[A]} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

Montrer que si $A, \widetilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ et $B, \widetilde{B} \in M_2(\mathbb{R})$, alors $B_{[A]} \times \widetilde{B}_{[\widetilde{A}]} = (B\widetilde{B})_{[A\widetilde{A}]}$.

En déduire que si $B \in M_2(\mathbb{R})$ est semblable à $\widetilde{B} \in M_2(\mathbb{R})$, et si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à $\widetilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ alors les matrices par blocs $B_{[A]}$ et $\widetilde{B}_{[\widetilde{A}]}$ sont aussi semblables.

Indication : si $P \in M_2(\mathbb{R})$ et $Q \in M_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, considérer $P_{[Q]}$ et trouver son inverse.

Applications : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix}$. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A. Montrer également que si A est diagonalisable, alors M est diagonalisable.